自由边界问题的非协调有限元逼近及其离散问题迭代解*[1)]

谢 正 辉
(湖南怀化师专数学系)

APPROXIMATION OF THE NON-CONFORMING FINITE ELEMENT OF FREE BOUNDARY PROBLEMS AND THE ITERATIVE SOLUTION OF THE DISCRETE PROBLEM

Xie Zheng-hui
(*Huaihua Teacher's College, Hunan*)

Abstract

In this paper, we discuss a non-conforming finite element approximation of a kind of fixed supportplate obstacle problem. A density theorem is proved. We prove the convergence of the discrete problem to the continuous problem, discuss iterative methods for the discrete problem and show the convergence of the iterative solution to the discrete solution.

1. 连续问题稠密性定理

来源于力学、物理及工程中的薄板弯曲问题可归结为求解下面的变分不等式:

$$\begin{cases} \text{求 } u \in K, \text{ 使} \\ a(u, v-u) \geqslant (f, v-u), \ \forall v \in K, \end{cases} \tag{1}$$

其中,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx, \ \forall u, v \in H^2(\Omega), \tag{2}$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f v dx, \ \forall v, f \in L^2(\Omega), \tag{3}$$

K 为 $H^2(\Omega)$ 的非空闭凸集.

R. Glowinski et al.[1,2] 用混合法研究了固支障碍问题和带平均曲率约束问题, A. Fusciardi et al.[4] 用混合法研究了简支障碍问题, R. Glowinski et al.[2] 用非协调元法

* 1987 年 12 月 22 日收到.
1) 国家自然科学基金资助课题.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

研究了固支带平均曲率约束问题，沈树民用 C^1-Clough Tocher 元研究了简支带平均曲率约束问题的有限元法。本文利用 Morley 元研究了边界固支障碍问题的有限元逼近，证明了一个稠密性定理和离散解的收敛性。讨论了 Morley 元离散问题迭代解并证明了迭代解对离散解的收敛性。以下恒设 K 为下面的形式：

$$K=\{v\in H_0^2(\Omega);\ v\geqslant\varphi \text{ a.e 于 } \Omega\},$$

其中 $\varphi\in H^2(\Omega)$。

我们有下面的命题：

命题 1.1 如果 $f\in H^{-2}(\Omega)$，$\varphi\in H^2(\Omega)$ 且 $\varphi\leqslant 0$ 于 $\partial\Omega$ 的一个邻域，则问题(1)存在唯一解。

注．仅仅设 $\varphi\leqslant 0$ 于 $\partial\Omega$ 不能保证解存在．例如取 $\Omega\subset R^2$，$\Omega=\{(x,y)\in R^2;\ x^2+y^2\leqslant 1\}$，令 $\varphi=1-x^2-y^2\in H^2(\Omega)$，此时 $K=\phi$．另外，若 $\varphi\in H_0^2(\Omega)$ 则 K 非空，因而此问题(1)的解是存在唯一的。

稠密性定理如下：

定理 1.1 若 Ω 是星形区域，$\varphi\in H^2(\Omega)$ 且 $\varphi\leqslant 0$ 于 $\partial\Omega$ 的某邻域，则

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)\cap K}=K. \tag{4}$$

证．假设 Ω 是关于(0,0)的星形域，设 $v\in K$ 和 $\varepsilon>0$，定义 $\tilde{v}\in H^2(R^2)$ 如下：

$$\tilde{v}(x)=\begin{cases}v(x), & \text{如果 } x\in\Omega,\\ 0, & \text{如果 } x\in R^2-\Omega.\end{cases} \tag{5}$$

易证由(5)式定义的 $\tilde{v}(x)\in H^2(R^2)$ 且 $\tilde{v}(x)\geqslant\tilde{\varphi}(x)$ a.e 于 R^2，其中 $\tilde{\varphi}(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的延拓，$\tilde{\varphi}\leqslant 0$ 于 $R^2-\Omega$ 且 $\tilde{\varphi}(x)\in H^2(R^2)$。

定义 $\tilde{v}_\varepsilon(x)=\tilde{v}((1+\varepsilon)x)$，$\forall x\in R^2$，则容易看出 $\tilde{v}_\varepsilon(x)\in H^2(R^2)$ 且 $\mathrm{supp}\tilde{v}_\varepsilon(x)\subset\subset\Omega$。定义 v_ε 为

$$v_\varepsilon(x)=\tilde{v}_\varepsilon(x)|_\Omega,$$

那么有 $\tilde{v}_\varepsilon(x)\in H_0^2(\Omega)$，且 $v_\varepsilon\Rightarrow v$ 于 $H_0^2(\Omega)$ $(\varepsilon\to 0$ 时)，从而

$$X_1=\{v\in K,\ v\text{ 有紧支集于 }\Omega\}$$

在 K 中稠密。

设 $v\in X_1$ 且 $\{\rho_n\}_n$ 是一串正则化光滑子，$n\to\infty$ 时 ρ_n 的支集收缩到一点。定义 $\tilde{v}\in H^2(R^2)$ 和 $\{\tilde{v}_n\}_n$，$\tilde{v}_n\in C_0^\infty(R^2)$，$\forall n$

$$\tilde{v}_n=\tilde{v}*\rho_n,$$

那么易证得

$$\tilde{v}_n\Rightarrow\tilde{v}\text{ 于 }H^2(R^2).$$

进一步有 $\tilde{v}_n(x)=\int_{R^2}\tilde{v}(y)\rho_n(x-y)dy\geqslant\int_{R^2}\tilde{\varphi}(y)\rho_n(x-y)dy$。

不难证明 $\tilde{v}_i\in C_0^\infty(R^2)$，且 i 充分大时

$$\mathrm{supp}\tilde{v}_i\subset\subset\Omega,$$
$$\tilde{v}_i\Rightarrow v\text{ 于 }H^2(\Omega)\ (i\to\infty\text{ 时}),$$
$$\tilde{v}_i\Rightarrow v\text{ 于 }C^0(\bar{\Omega})\ (i\to\infty\text{ 时}),$$

故当 i 充分大时 $\tilde{v}_i\in C_0^\infty(\Omega)$。

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

另一方面由定理的假设和 $v\in\mathfrak{X}_1$ 推知，有常数 $\delta>0$，使 $v=0$，$\varphi\leqslant 0$ 于 Ω_δ，其中 Ω_δ 定义为

$$\Omega_\delta=\{p\in\Omega,\ \mathrm{dist}(p,\partial\Omega)<\delta\},$$

故当 $i\geqslant i_0$ 时，$v(p)-\varepsilon\leqslant\tilde{v}_i(p)\leqslant v(p)+\varepsilon$，当 $p\in\Omega-\Omega_{\delta/2}$ 时，$v_i(p)=v(p)=0$，当 $p\in\Omega_{\delta/2}$ 时因 $\Omega-\Omega_{\delta/2}\subset\subset\Omega$，故有函数 $\theta(x)$ 满足下面的条件：

$$\theta(x)\in C_0^\infty(\Omega),\ \theta(x)\geqslant 0\ \text{于}\ \Omega,\ \theta=1\ \text{于}\ \Omega-\Omega_{\delta/2}.$$

我们定义 $w_{i,\varepsilon}=\tilde{v}_i+\varepsilon\theta(x)$，则当 i 充分大时，$w_{i,\varepsilon}\in C_0^\infty(\Omega)$ 且

$$w_{i,\varepsilon}=\tilde{v}_i+\varepsilon\theta(x)\geqslant\varphi\ \text{于}\ \Omega,$$

故 $w_{i,\varepsilon}\in K$，而 $\varepsilon\to 0$ 时

$$w_{i,\varepsilon}\Rightarrow\tilde{v}_i\ \text{于}\ H^2(\Omega).$$

因此 $i\to\infty$，$\varepsilon\to 0$ 时，$w_{i,\varepsilon}\Rightarrow v$ 于 $H^2(\Omega)$. 从而定理证毕.

假设 Ω 适当光滑，如果 $f\in L^q(\Omega)$，$q>2$，则由文献[5]知 $u\in W^{3,p}_{10c}(\Omega)$.

2. 非协调有限元逼近

假设 $f\in L^2(\Omega)$ 且用 $(\cdot,\cdot)$ 表示通常的 $L^2(\Omega)$ 空间的内积. 在引入问题(1)的非协调有限元之前，我们重新写出连续问题如下：

$$\begin{cases}\text{求 } u\in K,\ \text{使}\\ \tilde{a}(u,v-u)\geqslant\int_\Omega f(v-u)dx,\ \forall v\in K,\end{cases}\tag{6}$$

这里 $K=\{v\in H_0^2(\Omega);\ v\geqslant\varphi\ \text{a.e 于}\ \Omega\}$，而 $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$ 定义为

$$\tilde{a}(v,w)=\int_\Omega\sum_{|\alpha|=2}D^\alpha vD^\alpha w\,dx.$$

我们利用 Green's 公式容易算出[2]

$$\tilde{a}(v,w)=\int_\Omega\Delta v\Delta w\,dx,\ \forall v,w\in H_0^2(\Omega).\tag{7}$$

从(7)知半范数 $|v|_{2,\Omega}$ 满足

$$|v|^2_{2,\Omega}=\tilde{a}(v,v)=|\Delta v|^2_{0,\Omega}.$$

它是 $H_0^2(\Omega)$ 上的一个范数且等价于通常的 $H_0^2(\Omega)$ 范数 $\|v\|_{H_0^2(\Omega)}$，其中

$$\|v\|_{H_0^2(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha v\|^2\right)^{1/2}.$$

下面定义非协调有限元空间及其对应的逼近问题.

为简单起见我们假设 Ω 是 R^2 的一个有界多边形区域. 设 $\{\mathscr{J}_h\}_h$ 是 Ω 的一个三角形剖分族，h 为剖分 $\mathscr{J}_h$ 的单元的最大边长. 我们使用 Morley 有限元空间 V_h，其定义见[2]. 用下面定义的 K_h 和 $\tilde{a}_h(v_h,w_h)$ 来逼近 K 和 $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$.

$$K_h=\{v_h\in V_h;\ v_h(p)\geqslant\varphi(p),\ \forall p\ \text{为}\ \mathscr{J}_h\ \text{的单元顶点}\},$$

$$\tilde{a}_h(v_h,w_h)=\sum_{T\in\mathscr{J}_h}\int_T\sum_{|\alpha|=2}D^\alpha v_hD^\alpha w_h\,dx,\ \forall v_h,w_h\in V_h.$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

易证泛函：$v_h \in V_h \to [\tilde{a}_h(v_h, v_h)]^{\frac{1}{2}}$ 是 V_h 上的一个范数，用 $\|\cdot\|_h$ 表示，即

$$\|v_h\|_h = \{\tilde{a}_h(v_h, v_h)\}^{1/2}, \quad \forall v_h \in V_h.$$

我们考虑问题 (6) 的逼近问题

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in K_h, \text{ 使} \\ \tilde{a}_h(u_h, v_h - u_h) \geqslant \int_\Omega f(v_h - u_h)dx, \quad \forall v_h \in K_h. \end{cases} \tag{8}$$

命题 2.1　问题(8)存在唯一解.

现在讨论 $\{u_h\}_h$ 当 $h \to 0$ 时的收敛性，建立两个引理.

引理 2.1　设 Ω 是凸的，$\{v_h\}_h$ 满足

$$\forall h, \quad v_h \in K_h, \tag{9}$$

$$\forall h, \quad \|v_h\|_h \leqslant C, \tag{10}$$

那么我们可以从 $\{v_h\}_h$ 中选一个子列，使得

$$v_h \to v^* \text{ 于 } L^2(\Omega) \ (h \to 0 \text{ 时}),$$

$$v^* \in K. \tag{11}$$

证. 从 [6] 知，存在一个与 h 无关的常数 C，使 $\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|v_h\|_h$, $\forall v_h \in V_h$. 这实际上是对于 Morley 有限元空间的离散 Poincaré-Friedrichs 不等式.

如果 $\{v_h\}_h$ 满足 (10)，那么由上式可知 $\{v_h\}_h$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的有界序列，必存在 $\{v_h\}_h$ 的子列以及 $v^* \in L^2(\Omega)$，使 $v_h \to v^*$ 于 $L^2(\Omega)$.

下面只须证明 $v^* \in K$.

我们引入双线性型 G_h:

$$G_h(v_h, v) = \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \int_T \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha v_h D^\alpha v dx, \quad \forall \{v_h, v\} \in V_h \times H_0^2(\Omega).$$

因线性泛函 $v \to G_h(v_h, v)$ 是连续的，故存在唯一的 $g_h \in H_0^2(\Omega)$，使

$$\int_\Omega \Delta g_h \Delta v dx = G_h(v_h, v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \tag{12}$$

在 (12) 中取 $v = g_h$，那么我们有(注意(7))

$$|g_h|_{2,\Omega} \leqslant \|v_h\|_h,$$

故有子列使

$$g_h \to g^* \text{ 于 } H_0^2(\Omega). \tag{13}$$

为了证明 $g^* = v^*$，我们引入 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. 考虑下面的双调和问题:

$$\begin{cases} \Delta^2 w = \phi, \\ w \in H_0^2(\Omega). \end{cases} \tag{14}$$

其变分形式为

$$\begin{cases} w \in H_0^2(\Omega), \\ \int_\Omega \Delta w \Delta v dx = \int_\Omega \phi v dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \end{cases} \tag{15}$$

从 Ω 的凸性以及[10]我们有

$$w \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega). \tag{16}$$

在(15)中取 $v = g_h$，得

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\int_\Omega \psi g_h dx = \int_\Omega \Delta w \Delta g_h dx. \tag{17}$$

从(17)和(12)知

$$\int_\Omega \psi g_h dx = G_h(v_h, w). \tag{18}$$

利用 Green's 公式有(参见[2])

$$G_h(v_h, w) = \sum_{T\in \mathcal{J}_h} \left\{ \int_T v_h \Delta^2 w dx - \int_{\partial T} \frac{\partial \Delta w}{\partial n} v_h ds + \int_{\partial T} \Delta w \frac{\partial v_h}{\partial n} ds \right.$$
$$\left. + \int_{\partial T} \left(- \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial v_h}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} \frac{\partial v_h}{\partial s} \right) ds \right\}, \tag{19}$$

其中 s 和 n 分别为边界 ∂T 的单位切向量和单位外法向量.

令 $F_h(v_h, w) = \sum_{T\in \mathcal{J}_h} \int_{\partial T} \left(\Delta w \frac{\partial v_h}{\partial n} - \frac{\partial \Delta w}{\partial n} v_h - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial v_h}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} \frac{\partial v_h}{\partial s} \right) ds$,

利用(18)和(19)有

$$\int_\Omega (g_h - v_h)\psi dx = F_h(v_h, w). \tag{20}$$

利用 w 的 $H^3(\Omega)$ 正则性并参见[6]易证得

$$|F_h(v_h, w)| \leqslant Ch(|w|_{3,\Omega} + h\|\Delta^2 w\|_{L^2(\Omega)})\|v_h\|_h, \tag{21}$$

故由(20)和(21)令 $h \to 0$ 可得

$$\int_\Omega (g^* - v^*)\psi dx = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{22}$$

因此, $v^* = g^*$ a.e 于 Ω, 有 $v^* \in H_0^2(\Omega)$.

剩下须证

$$v^* \geqslant \varphi \text{ a.e 于 } \Omega. \tag{23}$$

它等价于

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega),\ \psi \geqslant 0, \text{ 有 } \int_\Omega (v^* - \varphi)\psi dx \geqslant 0. \tag{24}$$

我们知道:

$$\int_\Omega (v_h - \varphi)\psi dx = \sum_{T\in \mathcal{J}_h} \int_T (v_h - \varphi)\psi dx, \tag{25}$$

$$\int_T (v_h - \varphi)\psi dx = \int_T (v_h - v_{hI} + v_{hI} - \varphi_I + \varphi_I - \varphi)\psi dx, \tag{26}$$

其中 v_{hI} 和 φ_I 分别为 v_h 和 φ 的线性插值. 不难证明 $v_{hI} \geqslant \varphi_{hI}$ 于 T, 故由(26)有

$$\int_T (v_h - \varphi)\psi dx \geqslant \int_T (v_h - v_{hI})\psi dx + \int_T (\varphi_I - \varphi)\psi dx$$
$$\geqslant -Ch^2\|v_h\|_{2,T}\|\psi\|_{0,T} - Ch^2\|\varphi\|_{2,T}\|\psi\|_{0,T}, \tag{27}$$

亦即:

$$\int_\Omega (v_h - \varphi)\psi dx \geqslant -Ch^2\|v_h\|_{h,\Omega}\|\psi\|_{0,\Omega} - Ch^2\|\varphi\|_{2,\Omega}\|\psi\|_{0,\Omega}. \tag{28}$$

在(28)中令 $h \to 0$, 由 v_h 的弱收敛性可得到要证明的(24)式. 引理证毕.

我们构造算子 $r_h: H_0^2(\Omega) \to V_h$ 如下:

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} r_h v \in V_h,\ \forall v \in H_0^2(\Omega),\ r_h v(p) = v(p),\ \forall p \text{ 为 } \mathscr{T}_h \text{ 的顶点}, \\ \int_{LiT} \frac{\partial}{\partial n} r_h v ds = \int_{LiT} \frac{\partial v}{\partial n} ds,\ LiT \text{ 是 } T \in \mathscr{T}_h \text{ 的边 } (i = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{29}$$

引理 2.2　$r_h \in \mathscr{L}(H_0^2(\Omega), v_h)$，更精确地，

$$\|r_h v\|_h \leqslant |v|_{2,\Omega},\ \forall v \in H_0^2(\Omega). \tag{30}$$

由算子 r_h 的定义和 Green's 公式容易证明.

引理 2.3　假设 Ω 是 R^2 中的星形多边形区域，那么有

$$r_h v \in K_h,\ \forall h, \tag{31}$$

$$\lim_{h \to 0} \|r_h v - v\|_h = 0,\ \forall v \in K. \tag{32}$$

证. 因 $r_h v \in V_h$，而 $r_h v(p) = v(p) \geqslant \varphi(p)$，$\forall p$ 为 $\mathscr{T}_h$ 的顶点. 故 $r_h v \in K_h$，即(31)式成立.

由稠密性定理 1.1，$\forall v \in K$，$\exists v_n \in C_0^\infty(\Omega) \cap K$，使

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n - v\|_{H^2(\Omega)} = 0, \tag{33}$$

故任给 $\varepsilon > 0$，$\exists n_0$，使

$$|v - v_{n_0}| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{34}$$

对 v_{n_0} 的插值 $r_h v_{n_0}$，当 h 充分小时有[6,11]

$$\|v_{n_0} - r_h v_{n_0}\|_h \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35}$$

故由(30),(34),(35)式可知当 h 充分小时，

$$\begin{aligned} \|v - r_h v\|_h &\leqslant |v - v_{n_0}|_{2,\Omega} + \|v_{n_0} - r_h v_{n_0}\|_h + \|r_h v_{n_0} - r_h v\|_h \\ &\leqslant 2|v - v_{n_0}|_{2,\Omega} + \|v_{n_0} - r_h v_{n_0}\|_h < \varepsilon, \end{aligned}$$

从而 (32) 式成立，引理证毕.

为了讨论逼近问题 (8) 对问题 (1) 的解 u 当 $h \to 0$ 时的收敛性，我们定义空间 $\tilde{V}_h$ 如下：

$$\tilde{V}_h = \{v \in L^2(\Omega);\ v_h|_T \in H^2(T),\ \forall T \in \mathscr{T}_h\}.$$

易知 $H^2(\Omega)$、$V_h \subset \tilde{V}_h$，定义双线性泛函 $\tilde{a}_h$

$$\tilde{a}_h(v, w) = \sum_{T \in \mathscr{T}_h} \int_T \sum_{|\alpha| = 2} D^\alpha v D^\alpha w dx,\ \forall v, w \in \tilde{V}_h.$$

令 $\|v_h\|_h = [\tilde{a}_h(v, v)]^{\frac{1}{2}}$，$\forall v \in \tilde{V}_h$，

$$G_h(v_h, v) = \tilde{a}_h(v_h, v)(= \tilde{a}_h(v, v_h)),\ \forall v \in V_h.$$

现在证明 $h \to 0$ 时逼近解的收敛性.

定理 2.1　设 u 是连续问题(1)的解，u_h 是离散问题(8)的解，再假设 Ω 是 R^2 的有界凸多边形区域(从而是星形区域)，那么有

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_h = 0 \tag{36}$$

证. 我们分两步进行证明，以下的 c 表示与 h 无关的常数，在各处取值可不同.

$$\tilde{a}_h(u_h, u_h) \leqslant \tilde{a}_h(u_h, v_h) - \int_\Omega f(v_h - u_h) dx,\ \forall v_h \in K_h.$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

故

$$\|u_h\|_h^2 \leqslant C\|u_h\|_h\|v_h\|_h + \|f\|_{0,\Omega}(\|v_h\|_h + \|u_h\|_h),\ \forall v_h \in K_h. \tag{37}$$

取 $v_0 \in C_0^2(\Omega) \cap K$，则由引理 2.3 知 $v_h = r_h v_0 \in K_h$，且

$$\lim_{h\to 0}\|r_h v_0 - v_0\|_h = 0.$$

在(37)式中取 $v_h = r_h v_0$，则有常数 m 和 M，当 h 充分小时

$$\|u_h\|_h^2 \leqslant \alpha^{-1}(mM + \|f\|_{0,\Omega})\|u_h\|_h + \alpha^{-1}m\|f\|_{0,\Omega},$$

其中 α 为正定性常数.

由此可知存在与 h 无关的常数 C，当 h 充分小时 $\|u_h\|_h \leqslant C$.

因 Ω 是凸的，且 $u_h \in K_h$，由引理 2.1 可从 $\{u_h\}_h$ 中选一个子列(仍用 $\{u_h\}_h$ 表示)，使

$$u_h \to u^* \text{ 于 } L^2(\Omega),\ \text{且 } u^* \in K. \tag{38}$$

为了证明 $\lim_{h\to 0}\|u - u_h\|_h = 0$，我们在(8)式中取 $v_h = r_h u \in K_h$，那么得

$$\|u - u_h\|_h^2 = \tilde{a}_h(u - u_h, u - u_h) = \tilde{a}_h(u - u_h, u - r_h u) + \tilde{a}_h(u - u_h, r_h u - u_h)$$

$$\leqslant \|u - u_h\|_h\|u - r_h u\|_h + \tilde{a}_h(u, r_h u - u_h) - \int_\Omega f(r_h u - u_h)dx. \tag{39}$$

因 $u^* \in K$，故

$$\tilde{a}_h(u, u - u^*) - \int_\Omega f(u - u^*)dx$$

$$= \tilde{a}(u, u - u^*) - \int_\Omega f(u - u^*)dx \leqslant 0. \tag{40}$$

设 g_h 是由(12)式所定义的映射中由 u_h 所确定的函数，即

$$\int_\Omega \Delta g_h \Delta v dx = \tilde{a}_h(u_h, v),\ \forall v \in H_0^2(\Omega), \tag{41}$$

其中 $g_h \in H_0^2(\Omega)$.

因 $u, u^* \in K \subset H_0^2(\Omega)$，故

$$\tilde{a}_h(u, u^* - u_h) = a(u, u^*) - a(g_h, u). \tag{42}$$

类似于引理 2.1 的证明我们有

$$g_h \to u^* \text{ 于 } H_0^2(\Omega). \tag{43}$$

由(39)—(41)得

$$\|u - u_h\|_h^2 \leqslant \|u - u_h\|_h\|u - r_h u\|_h + \tilde{a}_h(u, r_h u - u) + a(u, u^* - g_h)$$

$$- \int_\Omega f(r_h u - u)dx - \int_\Omega f(u^* - u_h)dx. \tag{44}$$

由(32)、(43)、(38)、(44)可知(36)式成立. 定理证毕.

3. 非协调有限元离散问题迭代解

下面将讨论离散问题(8)的对偶迭代解，为此引入问题(8)对应的 Lagrange 泛函 L_h.

$$V_h \times L_h \to R,$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$L(v_h, \mu_h) = \frac{1}{2}\tilde{a}_h(v_h, v_h) - \int_\Omega f v_h dx + \sum_{T\in\mathscr{J}_h} \Delta_T \mu_h \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3}(\varphi - v_h)(P_{iT}) \quad (45)$$

其中 Δ_T 为 $T \in \mathscr{J}_h$ 的面积，P_{iT} 为 T 的三个顶点 $(i = 1, 2, 3)$。

令　$L_h = \{q_h \in L^2(\Omega);\ q_h|_T \in P_0,\ \forall T \in \mathscr{J}_h\}$

$$L_h^+ = \{q_h \in L_h;\ q_h \geqslant 0 \text{ 于 } T,\ \forall T \in \mathscr{J}_h\},$$

那么有下面的定理。

定理 3.1　(45)式定义的 Lagrange 泛函 L 在 $V_h \times L_h^+$ 上有一个鞍点 $\{u_h, \lambda_h\}$，进一步有，u_h 是问题(8)的解，

$$\sum_{i=1}^{3} (u_h - \varphi)(P_{iT})\lambda_h = 0 \text{ 于 } T,\ \forall T \in \mathscr{J}_h. \quad (46)$$

证. V_h 和 L_h 是两个可分拓扑向量空间，V_h 和 L_h^+ 分别为 V_h 和 L_h 的紧凸子集. 同时 $\forall v \in V_h$，$\mu \to L(v, \mu)$ 是凹的和上半连续的；$V\mu \in L_h^+$，$v \to L(v, \mu)$ 是凸的和下半连续的，因而由极小-极大定理[12] 知鞍点 $\{u_h, \lambda_h\}$ 是存在的.

现设 $\{u_h, \lambda_h\}$ 是 L 在 $V_h \times L_h^+$ 上的一个鞍点，那么，

$$\sum_{T\in\mathscr{J}_h} \Delta_T(\mu_h - \lambda_h)\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(\varphi - u_h)(P_{iT}) \leqslant 0,\ \forall \mu_h \in L_h^+. \quad (47)$$

在(47)式中，对 $\forall T \in \mathscr{J}_h$，当 $x \in T$ 时，分别取 $\mu_h = 0$ 和 $\mu_h = 2\lambda_h$，在 $x \bar{\in} T$ 时，取 $\mu_h = \lambda_h$，可推得

$$\lambda_h \sum_{i=1}^{3}(\varphi - u_h)(P_{iT}) = 0 \text{ 于 } T.$$

从而(46)式成立. u_h 是问题(8)的解可由鞍点的定义及(46)得证. 定理证毕.

因 u_h 是离散问题的唯一解，假设 $\{u_h, \lambda_h\}$ 和 $\{u_h, \lambda_h'\}$ 是(45)中定义的 L 在 $V_h \times L_h^+$ 上的两个鞍点，令 $\delta_h = \lambda_h - \lambda_h'$，则有

$$\tilde{a}_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h dx + \sum_{T\in\mathscr{J}_h} \Delta_T \lambda_h \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} v_h(P_{iT}),\ \forall v_h \in V_h,$$

$$\tilde{a}_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h dx + \sum_{T\in\mathscr{J}_h} \Delta_T \lambda_h' \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} v_h(P_{iT}),\ \forall v_h' \in V_h.$$

由以上两式相减可得

$$\sum_{T\in\mathscr{J}_h} \Delta_T \delta_T \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} v_h(P_{iT}) = 0,\ \forall v_h \in V_h.$$

从而 $\delta_h|_T = 0$.

命题 3.1　(45)式中定义的泛函 L 在 $V_h \times L_h^+$ 上存在唯一鞍点 $\{u_h, \lambda_h\}$.

利用 Lagrange 泛函 L 可给出离散问题(8)的对偶迭代格式.

设 $\lambda_h^0 \in L_h^+$ 给定，对 $n \geqslant 0$，$\lambda_h^n \in L_h^+$ 已知，我们从下面的条件来确定 u_h^n 和 λ_h^{n+1}.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\begin{cases} \begin{cases} u_h^n \in V_h, \\ \tilde{a}_h(u_h^n, v_h) = \int_\Omega f v_h dx + \sum\limits_{T \in \mathscr{J}_h} \Delta_T \lambda_h^n \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{1}{3} V_h(P_{iT}), \ \forall v_h \in V_h, \end{cases} \\ \lambda_h^{n+1} = \left[\lambda_h^n + \rho \dfrac{1}{3} \sum\limits_{i=1}^{3} (\varphi - u_h)(P_{iT}) \right]^+, \ \forall T \in \mathscr{J}_h, \end{cases}$$

其中 $\rho > 0$ 为参数.

关于上述算法有下面的收敛性结果.

定理 3.2 设 ρ 满足 $0 < \rho < \dfrac{2}{\sigma}$, 其中 σ 定义为

$$\sigma = \sup_{v \in V_h} \frac{\left| \sum\limits_{T \in \mathscr{J}_h} \Delta_T \dfrac{1}{9} \left(\sum\limits_{i=1}^{3} v_h(P_{iT}) \right)^2 \right|}{\|v_h\|_h^2}, \tag{49}$$

那么

$$\lim_{n \to \infty} u_h^n = u_h, \tag{50}$$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_h^n = \lambda_h, \tag{51}$$

其中 u_h 是离散问题(8)的解, λ_h 是使 $\{u_h, \lambda_h\}$ 为泛函 L 在 $V_h \times L_h^+$ 上的唯一鞍点.

证. 设 $\{u_h, \lambda_h\}$ 是 L 在 $V_h^+ \times L_h^+$ 上的鞍点,则 u_h 是下面问题的解:

$$\begin{cases} u_h \in V_h, \\ \tilde{a}_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h dx + \sum\limits_{T \in \mathscr{J}_h} \Delta_T \lambda_h \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{1}{3} V_h(P_{iT}), \ \forall v_h \in V_h. \end{cases} \tag{52}$$

另一方面,如果 $\rho > 0$, 由定理 3.1 知

$$\lambda_h|_T = \left[\lambda_h + \rho \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} (\varphi - u_h)(P_{iT}) \right]^+, \ \forall T \in \mathscr{J}_h.$$

令

$$\bar{u}_h^n = u_h^n - u_h, \ \bar{\lambda}_h^n = \lambda_h^n - \lambda_h. \tag{53}$$

从 $q_h \to q_h^+$ 是收缩映射得

$$|\bar{\lambda}_h^{n+1}|_{0,\Omega}^2 \leqslant |\bar{\lambda}_h^n|_{0,\Omega}^2 + \frac{\rho^2}{9} \sum_{T \in \mathscr{J}_h} \int_T \left(\sum_{i=1}^{3} \bar{u}_h^n(P_{iT}) \right)^2 dx$$

$$- \frac{2\rho}{3} \sum_{T \in \mathscr{J}_h} \int_T \lambda_h^n \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} \bar{u}_h^n(P_{iT}) dx,$$

从而

$$|\bar{\lambda}_h^n|_{0,\Omega}^2 - |\bar{\lambda}_h^{n+1}|_{0,\Omega}^2 \geqslant 2\rho \frac{1}{3} \sum_{T \in \mathscr{J}_h} \int_T \bar{\lambda}_h^n \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} \bar{u}_h^n(P_{iT}) dx$$

$$- \frac{\rho^2}{9} \sum_{T \in \mathscr{J}_h} \int_T \left(\sum_{i=1}^{3} \bar{u}_h^n(P_{iT}) \right)^2 dx. \tag{54}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

从(52)和(53)式易知

$$\sum_{T\in\mathscr{J}_h}\Delta_T\lambda_h^n\sum_{i=1}^{3}\bar{u}_h^n(P_{iT})=\|\bar{u}_h^n\|_h^2. \tag{55}$$

故由(49)、(54)和(55)式易推出

$$|\lambda_h^n|_{0,\Omega}^2-|\lambda_h^{n+1}|_{0,\Omega}^2\geqslant 2\rho\|\bar{u}_h^n\|_h^2-\rho^2\sum_{T\in\mathscr{J}_h}\int_T\left(\sum_{i=1}^{3}\bar{u}_h^n(P_{iT})\right)^2dx$$

$$\geqslant 2\rho\|\bar{u}_h^n\|_h^2-\rho^2\sigma\|\bar{u}_h^n\|_h^2=\rho(2-\rho\sigma)\|\bar{u}_h^n\|_h^2,$$

亦即

$$|\lambda_h^n|_{0,\Omega}^2-|\lambda_h^{n+1}|_{0,\Omega}^2\geqslant\rho(2-\rho\sigma)\|\bar{u}_h^n\|_h^2. \tag{56}$$

故当 $0<\rho<\frac{2}{\sigma}$ 时，$\|\bar{u}_h^n\|_h^2\to 0$ $(n\to\infty)$，从而(50)成立.

由(56)式当 $0<\rho<\frac{2}{\sigma}$ 时，知 $\{\lambda_h^n\}_n$ 在 $L^2(\Omega)$ 中是有界的，故必存在子列弱收敛于 λ_h^*，其子列仍记为 $\{\lambda_h^n\}_n$. 我们可以证明 $\{u_h,\lambda_h^*\}$ 是 L 在 $V_h\times L_h^+$ 上的鞍点. 由鞍点的唯一性知 $\lambda_h^*=\lambda_h$，从而(51)式成立.

事实上由(48)式及 u_h^n 的收敛性有

$$\begin{cases}u_h\in V_h,\\ \tilde{a}_h(u_h,v_h)=\int_\Omega fv_hdx+\sum_{T\in\mathscr{J}_h}\Delta_T\lambda_h^*\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3}v_h(P_{iT}),\ \forall v_h\in V_h,\end{cases} \tag{57}$$

$$\sum_{T\in\mathscr{J}_h}\Delta_T(\mu_h-\lambda_h^{n+1})\left(\lambda_h^n+\rho\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3}(\varphi-u_h^n)(P_{iT})-\lambda_h^{n+1}\right)\leqslant 0,\ \forall\mu_h\in L_h^+. \tag{58}$$

类似于(56)式的证明得

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_h^{n+1}-\lambda_h^n)=0 \text{ 于 } L^2(\Omega) \text{ 强收敛}. \tag{59}$$

故由(58)令 $n\to\infty$ 并注意(59)及 u_h^n 的收敛性可得

$$\sum_{T\in\mathscr{J}_h}\Delta_T(\mu_h-\lambda_h^*)\rho\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3}(\varphi-u_h)(P_{iT})\leqslant 0,\ \forall\mu_h\in L_h^+. \tag{60}$$

由(59)和(60)式我们知道 $\{u_h,\lambda_h^*\}$ 是 L 在 $V_h\times L_h^+$ 上的鞍点.

以下只须证明 $\sigma<\infty$，而 $\sigma>0$ 是易见的.

由有限元空间 V_h 的定义知 $\forall v_h\in V_h$，$v_h|_T\in P_2$，$\forall T\in\mathscr{J}_h$，故有

$$\|v_h-v_h(P_{iT})\|_{0,T}\leqslant Ch|v_h|_{1,T},$$

因此

$$\left(\int_T v_h(P_{iT})^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant Ch|v_h|_{1,T}+\|v_h\|_{0,T},$$

$$\int_T v_h(P_{iT})^2dx\leqslant Ch^2|v_h|_{1,T}+\|v_h\|_{0,T}^2+Ch|v_h|_{1,T}\|v_h\|_{0,T},$$

$$\sum_{T\in\mathscr{J}_h}\sum_{i=1}^{3}\Delta_Tv_h(P_{iT})^2\leqslant Ch^2\sum_{T\in\mathscr{J}_h}|v_h|_{1,T}^2+C\sum_{T\in\mathscr{J}_h}\|v_h\|_{0,T}^2$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$+ Ch \sum_{T\in\mathcal{J}_h} |v_h|_{1,T_i}\|v_h\|_{0,T}, \tag{61}$$

其中 C 为与 h 无关的常数，在不同之处可不同.

再由离散的 Poincaré 不等式知[6]

$$\begin{cases}\|v_h\|_{0,\Omega} \leqslant C\|v_h\|_h, & \forall v_h \in V_h,\\ |v_h|_{1,\Omega} \leqslant C\|v_h\|_h, & \forall v_h \in V_h.\end{cases} \tag{62}$$

由(61)和(62)可知

$$\sum_{T\in\mathcal{J}_h} \Delta_T \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{3} v_h(P_{iT})\right)^2 \leqslant C\|v_h\|_h^2.$$

证毕.

4. 数值实验

本文在上几节讨论了固支障碍问题的 Morley 有限元逼近及离散问题的迭代解. 我们对 $\varphi = 0$, $f = 1$ 及 $f = -1$, 将区域 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ 分成128个三角形单元(均为全等三角形，共289个节点，225个内节点，64个边界节点)进行数值实验获得了一些数值结果. 在迭代过程中参数选为 $\rho = 0.7$.

$\varphi = 0$ 时 f 与 u	-1(76 time)	1(90 time)
u (0.125, 0.125)	0.632199420e − 07	0.205947641e − 07
u (0.875, 0.125)	0.777426189e − 07	0.223045994e − 06
u (0.875, 0.875)	0.162672906e − 06	0.110539075e − 04
u (0.125, 0.875)	0.212794522e − 06	0.293364730e − 05
u (0.375, 0.375)	0.398182380e − 06	0.749446001e − 05
u (0.500, 0.375)	0.328495861e − 06	0.328052426e − 05
u (0.625, 0.375)	0.334354973e − 06	0.347688118e − 05
u (0.625, 0.500)	0.102445461e − 06	0.276816418e − 05
u (0.625, 0.625)	0.631779035e − 06	0.285402231e − 05
u (0.500, 0.625)	0.964679363e − 07	0.367484219e − 05
u (0.375, 0.625)	0.748836835e − 07	0.494842629e − 05
u (0.375, 0.500)	0.279064192e − 06	0.904381527e − 06
u (0.500, 0.500)	0.196910260e − 06	0.164991822e − 05

当 $\rho = 0.3$ 时，迭代217次才收敛. 当 $\rho = 0.0003$ 时，迭代到500次仍未收敛，说明 ρ 不能取得太小. 这是因为要求 $0 < \rho < \frac{2}{\sigma}$，与理论结果相吻合. 当 $\rho = 0.7$ 时迭代不到100次就收敛，说明迭代参数选择 $\rho = 0.7$ 较佳. 在上述迭代过程中在 Siemens 7.570C 计算机所花 CPU 时间为966 Seconds. 由数值结果和上机计算过程可知，离散问题的迭代解法具有计算方便实用等优点，但收敛速度较慢. 如何提高这种算法的收敛速度仍是一个需要进一步探讨和研究的问题.

作者感谢周叔子教授和方爱农教授的指教. 本文的数值实验是在湖南大学计算中心

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Siemens 7.570 中型机上进行，得到了郭自华、钟道湫、朱可、陈海生等老师的帮助，在此谨致谢意！

参　考　文　献

[1] R. Glowinski et al., Approximation de inequations de la mecanique et de la physique, Dunod pais, 1976.
[2] R. Glowinski et al., IMA Journal numerical analysis 4(1984), 127—167.
[3] 冯康、石钟慈，弹性结构的数学理论，1981，科学出版社.
[4] A. Fusciardi et al., Numer. funct. anal. optimiz, 2, 5(1980), 397—420.
[5] A. Friedman, Variational principles and free-boundary problems, 1982, Newyork.
[6] V. Ruas et al., CALCOLO 15, 2(1978), 101—120.
[7] P. G. Ciarlet, Finite element method for elliptic problems, North-holland, Amsterdam, 1978.
[8] F. Brezzi et al., Numer math 28(1977), 431—443.
[9] L. A. Caffarell et al., Ann. scuola. norm, pisa 4, 6(1979), 151—184.
[10] V. A. Kondratiev, Trans. moscow math, sci 1967, 227—313.
[11] P. Lascaux et al., RAIRO 9(1975), 9—53.
[12] J. Cèa, 最优化理论与算法(中译本)，科学出版社，1982.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net