

22
1280-1286

非饱和土壤水流问题含水量和通量的数值模拟研究*

S152.7

谢正辉^① 罗振东^② 曾庆存^① 朱江^①
戴永久^① 王朝斌^① 王会军^① 毕训强^① 林朝晖^①

(^①中国科学院大气物理研究所,北京 100080; ^②首都师范大学数学系,北京 100037)

摘要 利用混合有限元方法,建立了非饱和土壤水流动的数值计算模型,可以用来统一计算剖面入渗、蒸发、蒸腾和再分配以及当这些现象交替出现时的土壤含水量和水分通量分布,并可用于高精度高分辨率陆面模式。

关键词 非饱和土壤 混合有限元法 数值模拟

水流问题
含水量 通量

非饱和土壤水的流动是土壤水未完全充满孔隙时的流动,是多孔介质流体运动的一种重要形式.非饱和流动的预报在大气科学、土壤学、农业工程、环境工程和地下水动力学等方面具有重要意义.作为一个重要的气候因子——土壤含水量,其季节变动对中高纬度地区的天气与气候具有重要的影响.对土壤含水量的计算进行重点描述的陆面参数化研究,已是大气科学的热门课题^[1,2].地表和地下的水文过程,如大气降水、蒸发和植物的蒸腾,地面水的渗漏和深层水的上吸,根系的吸收和地下水流等,都归结为非饱和流动^[3-7].由于方程是非线性的,除了一些很特殊的情况外,不能得到解析解.因此,典型的作法是用数值逼近求解非饱和流方程.

在陆面过程研究中,不仅要模拟好土壤含水量的分布,而且还要使其通量有较好的近似.传统的土壤含水量方程的离散方法是通过先求含水量的分布,由此作差商得到通量分布.本文利用混合有限元方法建立了非饱和土壤水流动的数值模型,可提高通量的模拟精度,并使计算稳定,它可用于高精度高分辨率陆面模式,并统一计算剖面入渗、蒸发、蒸腾和再分配以及当这些现象交替出现时的含水量和通量分布.这些过程交替出现的时间判据是根据含水率在入渗边界达到残余或饱和含水率的起始时刻确定.

1 非饱和土壤水流动问题及其数值计算方案

1.1 垂直入渗和蒸发问题

基于大气环流模式的水平分辨率(1~5个经纬度),土壤水在水平方向上的流动可以忽略.我们考虑一维非饱和流问题,含水率有不同的时空分布.设 z 轴垂直向下,坐标原点取为地面, $Q(z, t)$ 为在 t 时刻离地面距离为 z 处的土壤含水率.假设地面有随时间变化的入渗或蒸发率,

1998-06-17 收稿,1998-11-26 收修改稿

* 科技部攀登预选项目(预-21)、国家自然科学基金重点项目(批准号:49735160)、CAS“九五”重点项目“自然控制论研究”项目以及博士后科学基金项目的联合资助

入渗为正, 蒸发为负. 假设 $G = (0, L)$. 在底部含水率有随时间而变化的分布. 则根据 Darcy 定律及连续性原理, 非饱和土壤水流问题可归结为下面的模型方程:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (D(Q) \frac{\partial Q}{\partial z}) + \frac{\partial K(Q)}{\partial z} = S_r, 0 < z < L, t > 0; \quad (1)$$

$$Q(z, 0) = Q_0(z), 0 \leq z \leq L; \quad (2)$$

$$Q(L, t) = \beta(t), t > 0; \quad (3)$$

$$K(Q) - D(Q) \frac{\partial Q}{\partial z} = q(t), z = 0, t > 0; \quad (4)$$

其中 Q 表示体积含水率, $-S_r$ 是根系吸水率, $K(Q)$ 是水力传导系数, $D(Q)$ 是土壤水扩散率, $q(t)$, $\beta(t)$ 和 $Q_0(z)$ 分别是已知的上边界水分通量、下边界含水量和初始时刻的含水量, 参见文献[3,4], z 是正向向下的垂直坐标. 由于深层土壤含水率相对于表层温度的变化很小, 我们假设 $\frac{d\beta}{dt} \approx 0$. 土壤水力传导系数 K 和土壤水扩散率 D 与 Q 的关系如下:

$$\begin{cases} K(Q) = K_s \left(\frac{Q}{Q_s}\right)^{2b+3}; \\ \Psi(Q) = \Psi_s \left(\frac{Q}{Q_s}\right)^{-b}; \\ D(Q) = -\frac{bK_s\Psi_s}{Q_s} \left(\frac{Q}{Q_s}\right)^{b+2}; \end{cases} \quad (5)$$

$Q_r \leq Q(z, t) \leq Q_s$, 其中 Q_s 和 Q_r 分别表示土壤水分饱和含水率和残余含水率, 而且饱和水传导率 K_s , 土质参数 b 和饱和土壤水势 Ψ_s 均为已知常数. 式(2), (3), (4) 分别是初始条件、下边界条件和上边界条件, 见文献[3,4]. 上边界条件有以下几种情况.

(1) 当 $q(t) > 0$ 时, 上边界条件(4) 相当于地表通量已知, 即认为表面供水强度(降雨或喷灌)已知, 未超过土壤入渗强度, 即表面不形成积水和表面径流. 但如果经过一定时间后地表面通量超过入渗能力, 此时假定形成径流泄走, 不形成缺水, 这种情况下边界条件(4) 应为

$$\begin{cases} K(Q) - D(Q) \frac{\partial Q}{\partial z} = q(t), \text{当 } z=0, t_a > t > 0; \\ Q(0, t) = Q_s, \text{当 } t \geq t_a; \end{cases} \quad (6)$$

这里假定 $Q_0(z) \leq Q_s$, Q_s 是对应于饱和含水率, 而 t_a 为 $Q(0, t) = Q_s(0, t)$ 的起始时间. 注意这里的 t_a 与 Q 有关, 从而这种边界条件的交替时刻也是预报变量, 需据实际问题(如土壤参数、土壤入渗强度等)确定.

(2) 当 $q(t) \leq 0$ 时, 上边界条件(4) 相当于土壤以某一蒸发率蒸发.

(3) 如果经历一段时间蒸发后, 地表达达到风干含水率, 此时 $Q = Q_r$, 这种情形的上边界条件(4) 应为

$$\begin{cases} K(Q) - D(Q) \frac{\partial Q}{\partial z} = q(t), \text{当 } z=0, t_a > t > 0; \\ Q(0, t) = Q_r, \text{当 } z=0, t \geq t_a; \end{cases} \quad (7)$$

这里假设 $Q_0(z) \geq Q_r$, 而 t_a 为 $Q(0, t) = Q_r$ 的起始时间.

(4) 当土壤表面保持饱和, 经历一段时间 t_a 以后开始蒸发, 此时的上边界条件(4) 应为

$$\begin{cases} Q(0, t) = Q_r, \text{ 当 } z=0, t_a > t > 0; \\ K(Q) - D(Q) \frac{\partial Q}{\partial z} = q(t), \text{ 当 } z=0, t \geq t_a; \end{cases} \quad (8)$$

(5) 当土壤表面保持残余含水率, 经历一段时间 t_a 以后开始入渗, 此时的上边界条件(4)应为

$$\begin{cases} Q(0, t) = Q_r, \text{ 当 } z=0, t_a > t > 0; \\ K(Q) - D(Q) \frac{\partial Q}{\partial z} = q(t), \text{ 当 } z=0, t \geq t_a; \end{cases} \quad (9)$$

根据以上定解条件, 求解基本方程, 便可得出垂直入渗、蒸发、蒸腾及再分配条件下土壤含水量的分布.

1.2 离散格式

下面研究初始和边界条件为(2)~(4)时方程(1)的定解问题, 给出非饱和土壤水流问题的混合有限元解法, 说明本模型的数值模拟过程. 我们引入水分通量函数 $p(z, t) = K(Q) - D(Q) \frac{\partial Q}{\partial z}$, 它在陆面过程研究中是十分重要的. 将边界条件齐次化, 令

$$\begin{cases} \bar{Q}(z, t) = Q(z, t) - \beta(t), \\ \bar{p}(z, t) = p(z, t) - q(t). \end{cases}$$

由于 $\beta(t)$ 相对于 t 的变化很小, 我们假定 $\frac{d\beta}{dt} \approx 0$. 利用这种分裂, 我们可以同时模拟土壤中的含水量和通过土壤中的水分通量. 原方程(1)~(4)可分裂为

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = S_r, & z \in (0, L), t > 0; \\ D(Q) \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} + \bar{p} = K(Q) - q(t), & z \in (0, L), t > 0; \\ \bar{p}(0, t) = 0, & t > 0; \\ \bar{Q}(L, t) = 0 & t > 0; \\ \bar{Q}(z, 0) = Q_0(z) - \beta(0), & 0 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (10)$$

设 $G = (0, L)$, $L^2(G)$ 表示在 G 上平方可积的 Lebesgue 空间, $H^1(G)$ 表示在 G 内直到一阶导数平方可积的 Sobolev 空间(参见文献[8]). 令 $H_E^1(G) = \{v \in H^1(G); v(L) = 0\}$, $L_F^2(G) = \{v \in L^2(G); v(0) = 0\}$, (\cdot, \cdot) 表示 G 上的 L^2 内积, 即

$$(u, v) = \int_G u \cdot v dz, \quad \forall u, v \in L^2(G).$$

问题(10)的变分形式为: 求 $(\bar{Q}, \bar{p}) \in H_E^1(G) \times L_F^2(G)$, 使得

$$\begin{cases} \left(\left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t}, v \right) - \left(\bar{p}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) = (S_r, v), & \forall v \in H_E^1(G), t > 0; \\ \left(D(Q) \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}, w \right) + (\bar{p}, w) = (K(Q) - q(t), w), & \forall w \in L_F^2(G), t > 0; \\ \bar{Q}(z, 0) = Q_0(z) - \beta(0), & 0 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (11)$$

为了求问题(10)或(11)的数值解, 需要对其离散化. 对空间变量我们用有限元离散, 对时间变量用有限差分离散. 因此, 对 $\bar{G} = [0, L]$ 做有限元剖分, 使得 $0 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{l+1} = L$. 令 $e_i = [z_i, z_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, l$ 为 $l+1$ 个单元. 为了方便起见, 取 $H^1(G)$ 和 $L^2(G)$ 的有限元子空间为

$$\begin{aligned} V_h &:= \{v; v \text{ 在 } [0, L] \text{ 上连续且 } v|_{e_i} \text{ 上为线性的, } i=0, 1, \dots, l\}, \\ V_{hE} &:= V_h \cap H_E^1(G), \\ W_h &:= V_h \cap L^2(G). \end{aligned}$$

设 N 为正整数, T 为任意给定的时刻, 则时间步长为 $k = T/N$. 用 \bar{Q}^n 和 \bar{p}^n 分别表示 \bar{Q} 和 \bar{p} 在 $t_n = nk$ 时刻的值. 于是, 问题(11)的全离散化形式为: 求 $(\bar{Q}_h^{n+1}, \bar{p}_h^{n+1}) \in V_{hE} \times W_h$ 使得 $(0 \leq n \leq N-1)$;

$$\begin{cases} (\bar{Q}_h^{n+1}, v) - k \left(\bar{p}_h^{n+1}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = k(S_r, v) + (\bar{Q}_h^n, v), \quad \forall v \in V_{hE}; \\ \left(D(Q_h^n) \frac{\partial \bar{Q}_h^{n+1}}{\partial z}, \omega \right) + (\bar{p}_h^{n+1}, \omega) = (K(Q_h^n) - q(t_n), \omega), \quad \forall \omega \in W_h; \\ \bar{Q}_h^0 = I_h Q_0(z) - \beta(0), \quad 0 \leq z \leq L; \end{cases} \quad (12)$$

其中 $I_h Q_0(z)$ 表示 $Q_0(z)$ 在 V_{hE} 上的某种近似(可取为插值).

不失一般性, 不妨取 $S_r = 0$. 令 e_i 的长度为 $h_i, i = 0, 1, \dots, l$. 则在每个单元 e_i 上的一次插值基函数为

$$N_i = (z_{i+1} - z) / h_i, M_{i+1} = (z - z_i) / h_i. \quad (13)$$

在每个单元 e_i 上, 令

$$\bar{Q}_h^n|_{e_i} = N_i \bar{Q}_i^n + M_{i+1} \bar{Q}_{i+1}^n, \bar{p}_h^n|_{e_i} = N_i \bar{p}_i^n + M_{i+1} \bar{p}_{i+1}^n. \quad (14)$$

并取

$$D(Q_h^n)|_{e_i} = D(Q_i^n) \equiv D_i^n, K(Q_h^n)|_{e_i} = K(Q_i^n) \equiv K_i^n, Q_i^n = \bar{Q}_i^n + \beta(t_n). \quad (15)$$

于是, 问题(12)在每个单元 e_i 上的刚度矩阵, 未知向量和右端项可表示为

$$\begin{bmatrix} h_i/3 & h_i/6 & k/2 & k/2 \\ h_i/6 & h_i/3 & -k/2 & -k/2 \\ -D_i^n/2 & D_i^n/2 & h_i/3 & h_i/6 \\ -D_i^n/2 & D_i^n/2 & h_i/6 & h_i/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{n+1} \\ \bar{Q}_{i+1}^{n+1} \\ \bar{P}_i^{n+1} \\ \bar{P}_{i+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i \bar{Q}_i^n / 3 + h_i \bar{Q}_{i+1}^n / 6 \\ h_i \bar{Q}_i^n / 6 + h_i \bar{Q}_{i+1}^n / 3 \\ h_i K_i^n / 2 - h_i q(t_n) / 2 \\ h_i K_i^n / 2 - h_i q(t_n) / 2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

为了形成总体方程, 将单元刚度矩阵和未知向量适当变换为

$$\begin{bmatrix} 2h_i & 3k & h_i & 3k \\ h_i & -3k & 2h_i & -3k \\ -3D_i^n & 2h_i & 3D_i^n & h_i \\ -3D_i^n & h_i & 3D_i^n & 2h_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{n+1} \\ \bar{P}_i^{n+1} \\ \bar{Q}_{i+1}^{n+1} \\ \bar{P}_{i+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h_i \bar{Q}_i^n + h_i \bar{Q}_{i+1}^n \\ h_i \bar{Q}_i^n + 2h_i \bar{Q}_{i+1}^n \\ 3h_i K_i^n - 3h_i q(t_n) \\ 3h_i K_i^n - 3h_i q(t_n) \end{bmatrix} \quad (17)$$

利用有限元法的总体合成技术(参见文献[9, 10]), 可由(17)组成方程组如下:

$$\begin{bmatrix} D_0 & \bar{D}_0 & O & \dots & O & O & O \\ C_0 & D_1 & \bar{D}_1 & \dots & O & O & O \\ O & C_1 & D_2 & \dots & O & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & D_{l-1} & \bar{D}_{l-1} & O \\ O & O & O & \dots & C_l & D_l & \bar{D}_l \\ O & O & O & \dots & O & C_l & D_{l+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0^{n+1} \\ X_1^{n+1} \\ X_2^{n+1} \\ \dots \\ X_{l-1}^{n+1} \\ X_l^{n+1} \\ X_{l+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ \dots \\ G_{l-1} \\ G_l \\ G_{l+1} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$Q_i^n = \bar{Q}_i^n + \beta(t_n); p_i^n = \bar{p}_i^n + q(t_n), i=0,1,\dots,l+1, n=0,1,\dots,N, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{D}_i &= \begin{pmatrix} hi & 3k \\ 2hi & -3k \end{pmatrix}; C_i = \begin{pmatrix} -3D_{i-1}^n & 2h_i \\ -3D_{i-1}^n & h_i \end{pmatrix}, i=0,1,\dots,l; \\ O &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; D_0 = \begin{pmatrix} 2h_0 & 3k \\ h_0 & -3k \end{pmatrix}, D_{l+1} = \begin{pmatrix} 1+3D_l^n & h_l \\ 3D_l^n & 2h_l \end{pmatrix}, \\ D_i &= \begin{pmatrix} 2hi+3D_{i-1}^n & 3k+h_i-1 \\ hi+3D_{i-1}^n & -3k+2h_i-1 \end{pmatrix}, i=1,2,\dots,l; \\ G_0 &= \begin{pmatrix} 2h_0\bar{Q}_0^n + h_0\bar{Q}_1^n \\ h_0\bar{Q}_0^n + 2h_0\bar{Q}_1^n \end{pmatrix}, G_{l+1} = \begin{pmatrix} 3h_l K_{l-1}^n - 3h_l q(t_n) \\ 3h_l K_{l-1}^n - 3h_l q(t_n) \end{pmatrix}, \\ G_i &= \begin{pmatrix} 2h_i\bar{Q}_i^n + h_i\bar{Q}_{i+1}^n + 3h_{i-1}K_{i-1}^n - 3h_{i-1}q(t_n) \\ h_i\bar{Q}_i^n + 2h_i\bar{Q}_{i+1}^n + 3h_{i-1}K_{i-1}^n - 3h_{i-1}q(t_n) \end{pmatrix}, i=1,2,\dots,l; \\ X_i^{n+1} &= \begin{pmatrix} Q_i^{n+1} \\ \bar{p}_i^{n+1} \end{pmatrix}, i=0,1,2,\dots,l+1. \end{aligned}$$

因此,只要给定空间步长 h_i 、时间步长 k 以及初边值和参数 K_i, b, Ψ_i 的值,就可以由式(18)和(19)求出问题(11)的混合有限元解,即含水量和水分通量的数值解。

如果原问题是第一边值条件,即左边界的含水量 $Q(0, t)$ 给定时,只需在齐次化边界条件时稍加改变,并将 $G_i (i \geq 1)$ 中的 q 去掉,而将(18)中系数矩阵第一行第一列(即左上角)的元素加上1,其余元素都不变。

2 数值模拟

在陆面及大气环流模式中,将全球土壤作某些典型分类,并对格点标定土壤参数类型,按照 Dickinson 等的 BATS 模式文本¹⁾对12种土壤给出的参数列表1。

表1 12种土壤参数

土壤种类/参数	Q_i	$-\Psi_i/\text{mm}$	$K_i/\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$	b	Q_i/Q_i
1	0.33	30	0.200 0	3.5	0.088
2	0.36	30	0.080 0	4.0	0.119
3	0.39	30	0.003 2	4.5	0.151
4	0.42	200	0.013 0	5.0	0.266
5	0.45	200	8.9e-3	5.5	0.300
6	0.48	200	6.3e-3	6.0	0.332
7	0.51	200	4.5e-3	6.8	0.378
8	0.54	200	3.2e-3	7.6	0.419
9	0.57	200	2.2e-3	8.4	0.455
10	0.60	200	1.6e-3	9.2	0.487
11	0.63	200	1.1e-3	10.0	0.516
12	0.66	200	0.8e-3	10.8	0.542

1) Dickison R E, Henderson-Sellers A, Kennedy P J, et al. Biosphere atmosphere transfer scheme (BATS) version 1e as coupled to the NCAR community climate model. NCAR Technical Note, NCAR/TN 387+STR, 1993, 1~72

2.1 第 8 种土壤的情况

下面以第 8 种土壤参数为例给出入渗蒸发问题混合有限元解模拟结果。

第 8 种土壤参数为： $Q_s = 0.54$, $\phi_s = -200 \text{ mm}$, $K_s = 3.2 \times 10^{-3} \text{ mm/s}$, $B = 7.6$, $Q_r/Q_s = 0.419$, $L = 200 \text{ cm}$. 取时间步长 $k = 0.5 \text{ h}$, 空间步长 $h_i = 1 \text{ cm}$, 将区域 $\bar{\Omega} = [0, 200]$ 分为 200 个相等的单元. 假设在土壤表面 ($z = 0$) 保持一段时间的定常入渗通量 $q = 0.1 \text{ cm/h}$, $\beta(t) = 0.54 \times 0.419$, $Q_0(z) = 0.54 \times 0.419$, 则土壤水分入渗和蒸发过程的初始和边界条件为

$$\begin{cases} Q(z, 0) = 0.54 \times 0.419, z \in [0, 200] \\ q(t) = \begin{cases} 0.1 \text{ cm/h}, & \text{当 } 0 < t < 450 \text{ h} \\ -0.1 \text{ cm/h}, & \text{当 } 450 \leq t \leq 900 \text{ h}; \end{cases} \\ Q(200, t) = 0.54 \times 0.419. \end{cases} \quad (20)$$

当 $S_r = 0$ 时, 将这些数据输入模式 (18) ~ (19), 我们分别得到从 0 ~ 450 h 中, 每隔 30 h 土壤中的含水量和水分通量的分布图 1 和图 2. 从图 1 可以看出, 当入渗开始时刻, 地表面层的含水率迅速从 0.226 上升到 0.5 以上. 之后, 地表面 $z = 0$ 处的含水率变化不大, 并逐步接近饱和含水率, 但没有达到饱和含水率, 不产生径流. 从图 2 看出, 入渗通量随深度递减, 同时随着入渗时间的增加, 入渗通量的梯度变化越来越平缓. 当 $t > 450 \text{ h}$ 时, 表土以 0.1 cm/h 的强度蒸发. 图 3 和图 4 分别为从 0 ~ 900 h 土壤中的水分入渗和蒸发交替进行的含水量和水分通量分布图, 其中从 0 ~ 450 h 入渗, 从 450 h 以后开始蒸发. 从图 3 可以看出, 当开始蒸发时, 表土的含水率降低. 过了一段时间以后, 含水率分布曲线逐渐随时间而降低. 由图 4 可见, 当开始蒸发一段时间以后, 土壤表面至其中某一位置, 通量为负, 与表面蒸发时水分通量向上的实际情况相符.

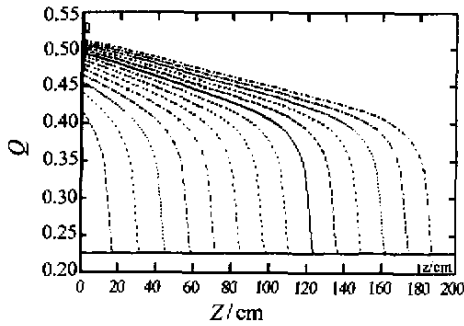


图 1 入渗每隔 30 h 的含水量分布

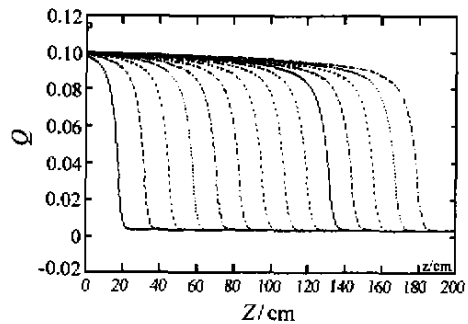


图 2 入渗每隔 30 h 的水分通量分布

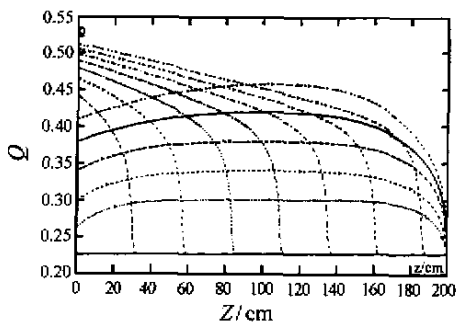


图 3 入渗及蒸发每隔 60 h 的含水量分布

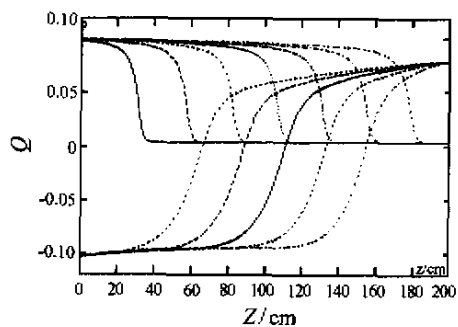


图 4 入渗及蒸发每隔 60 h 的水分通量分布

2.2 其余 11 种土壤的情况

对表 1 的其余 11 种土壤也可给出其混合有限元数值解. 可取土壤的深度为 $L = 200$ cm, 时间步长为 $k = 0.5$ h, 空间步长 $h_i = 1$ cm, 可将区域 $\bar{\Omega} = [0, 200]$ 分为 200 个相等的单元. 并假设在土壤表面 ($z = 0$) 保持一段时间的定常入渗通量 $q = 0.1$ cm/h, 不同种类土壤对应的 $\beta(t) = Q_d, 0 \leq t \leq T, Q_0(z) = Q_d, S_r = 0$, 则水分入渗土壤过程的初始和边界条件为

$$\begin{cases} Q(z, 0) = Q_r, z \in [0, 200]; \\ q(t) = 0.1 \text{ cm/h}, \text{ 当 } 0 < t < T \text{ h}; \\ Q(200, t) = Q_r. \end{cases} \quad (21)$$

其中 Q_r 由表 1 中给定. 将这些数据输入该模式, 可以算得到从 $0 \sim T$ h, 土壤中的含水量和水分通量的分布.

3 结论

本文初步探讨了利用混合有限元方法, 同时求解含水量和通量, 建立了一维非饱和土壤水流动的数值计算模型, 其初步的模拟结果基本上反映了物理性质, 且具有计算稳定, 通量模拟精度高等优点, 可以用来统一计算剖面入渗、蒸发等以及这些现象交替出现时的土壤含水率和水分通量分布. 它可用于高精度高分辨率陆面物理过程模式.

参 考 文 献

- 1 叶笃正, 曾庆存, 郭裕福. 当代气候研究. 北京: 气象出版社, 1991
- 2 Dai Y J, Zeng Q C. A land surface model (TAP94) for climate studies, Part I: formulation and validation in off-line experiments. *Advances in Atmospheric Sciences*, 1997, 14(4):433
- 3 谢正辉, 曾庆存, 戴永久, 等. 非饱和流问题的数值模拟研究. *中国科学, D 辑*, 1998, 28(2):175
- 4 谢正辉, 曾庆存, 戴永久, 等. 有限元方法在非饱和土壤水流问题中的应用. *气候与环境研究*, 1998, 28(2):73
- 5 雷志栋, 杨诗秀, 谢森传. 土壤水动力学. 北京: 清华大学出版社, 1988
- 6 Bear J. *Dynamics of fluids in porous media*. New York: American Elsevier Publishing Company Inc, 1972
- 7 Celia M A, Boulouton E T, Zarba R L. A general mass conservation numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resour Res*, 1990, 26(7):1 483
- 8 Adams R A. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975. 26
- 9 Ciarlet P G. *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*. Amsterdam: North-Holland, 1978
- 10 罗振东. 有限元混合法理论基础及其应用·发展与应用. 济南: 山东教育出版社, 1996