2003 年 2 月 计 算 数 学 第 25 卷第 1 期
Feb., 2003 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.25, No.1

非饱和水流问题的混合元法及其数值模拟*1)

罗振东
(首都师范大学数学系，北京， 100037)
谢正辉 朱 江 曾庆存
(中国科学院大气物理所国际气候与环境科学研究中心，北京， 100029)

MIXED FINITE ELEMENT METHOD AND NUMERICAL SIMULATION FOR THE UNSATURATED SOIL WATER FLOW PROBLEM

Luo Zhendong
(*Department of Mathematics, Capital Normal University, Beijing,* 100037)
Xie Zhenghui Zhu Jiang Zeng Qingcun
(*ICCES, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing,* 100029)

Abstract

In this paper, an unsaturated soil water flow equation is studied. The existence and uniqueness of its generalized solution and semi–discrete, fully discrete mixed finite element (MFE) solutions are proved, and the error estimates of the semi–discrete, fully discrete MFE solutions are analyzed. And finally, some numerical examples are given. By using the MFE method, the moisture content and flux can be simulated meanwhile; moreover, the computational accuracy for moisture flux is high and numerical model is stable.

Keywords: unsaturated soil water flow problem, mixed finite element method, error estimate, numerical simulation.

关键词：非饱和水流问题，混合有限元法，误差估计，数值模拟.

1. 引 言

均质土壤中的地下水流动可归结为非饱和土壤水的流动，是土壤水未完全充满孔隙时的流动，是多孔介质流体运动的一种重要形式. 非饱和流动的预报在大气科学、土壤学、农业

* 2001 年 10 月 2 日收到.

1) 国家自然科学基金 (10071052, 40275023 和 49776283)、北京市教委基金、中国科学院“百人计划”、中国科学院“九. 五”重点项目‘自然控制论’ (K2952-51-434)、国家重点基础发展项目 (G1998040900) 和北京市优秀人才专项经费联合资助.

工程、环境工程和地下水动力学等方面具有重要意义. 作为一个重要的气候因子 —— 土壤含水量, 其季节变动对中高纬度地区的天气与气候具有重要的影响. 对土壤含水量的计算进行重点描述的陆面参数化研究, 已是大气科学的热门课题 [1,2]. 地表和地下的水文过程, 如大气降水、蒸发和植物的蒸腾, 地面水的渗漏和深层水的上吸, 根系的吸收和地下水流等, 都归结为非饱和流动 [3-7]. 由于非饱和流动的数学模型归结为非线性的偏微分方程, 除了一些很特殊的情况外, 很难得到解析解. 因此, 典型的作法是用数值逼近求解非饱和流方程. 对入渗或蒸发的问题, 用有限差分方法进行离散时, 对边界条件以及土壤参数极为敏感. 通过变分法将其转化为已知通量的计算 [1-2], 较好地处理了这类边界问题, 但目前只给出了土壤水分含量的数值模拟方法 [3,5]. 在陆面过程研究中, 不仅要模拟好土壤含水量的分布, 而且还要使土壤中的通量有较好的近似. 对土壤含水量方程的传统的离散方法是先求含水量的分布, 再由此作差商求得通量分布, 这样得到的通量精度往往较差.

本文利用混合有限元方法建立了非饱和土壤水流动的守恒形式的数值模型, 可提高通量的模拟精度, 并使计算稳定. 利用这种方法, 可以一举同时求出地下水及其通量的分布, 提高计算效率, 可用于高精度高分辨率陆面模式, 用以统一计算剖面入渗, 蒸发, 蒸腾和再分配以及当这些现象交替出现时的含水量和通量分布情况.

2. 非饱和土壤水流问题的广义解的存在性

基于大气环流模式的水平分辨率 (1-5 个经纬度), 土壤水在水平方向上的流动可以忽略. 我们考虑一维非饱和流问题, 含水率有不同的时空分布. 设 z 轴垂直向下, 坐标原点取为地面, $Q(z,t)$ 为在 t 时刻离地面距离为 z 处的土壤含水率. 假设地面有随时间变化的入渗或蒸发率, 入渗为正, 蒸发为负. 在底部含水率有随时间而变化的分布. 则根据 Darcy 定律及连续性原理, 非饱和土壤水流问题可归结为下面的模型方程 (参见 [7,3-5]):

求 Q 使得对于任意的 $T>0$ 满足

$$\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(D(Q)\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial K(Q)}{\partial z}=S_r,\quad 0<z<L,\quad t\in(0,T); \tag{2.1}$$

$$Q(z,0)=Q_0(z),\quad 0\le z\le L; \tag{2.2}$$

$$Q(L,t)=\beta(t),\quad t\in(0,T); \tag{2.3}$$

$$K(Q)-D(Q)\frac{\partial Q}{\partial z}=q(t),\quad z=0,\quad t\in(0,T), \tag{2.4}$$

其中 Q 表示体积含水率, $-S_r$ 是根系吸水率, $K(Q)$ 是水力传导系数, $D(Q)$ 是土壤水扩散率, $q(t)$ 、 $\beta(t)$ 和 $Q_0(z)$ 分别是已知的上边界水分通量、下边界含水量和初始时刻的含水量, 参见文献 (参见 [7,3-5]). 土壤水力传导系数 K 和土壤水扩散率 D 与 Q 的关系如下:

$$\begin{cases} K(Q)=K_s\left(\dfrac{Q}{Q_s}\right)^{2b+3}; \\ \Psi(Q)=\Psi_s\left(\dfrac{Q}{Q_s}\right)^{-b}; \\ D(Q)=-\dfrac{bK_s\Psi_s}{Q_s}\left(\dfrac{Q}{Q_s}\right)^{b+2};\ Q_r\le Q(z,t)\le Q_s, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 Q_s 和 Q_r 分别表示土壤水分饱和含水率和残余含水率，而且 $0 < Q_s < 1$，饱和水传导率 K_s，土质参数 b 和饱和土壤水势 ψ_s 均为已知常数. 显然 $K(Q)$, $\dfrac{\partial K(Q)}{\partial Q}$, $D(Q)$ 和 $\dfrac{\partial D(Q)}{\partial Q}$ 是有界的，即存在常数 K_1 和 K_2 使得

$$K_1 \le \ K(Q),\ \ \frac{\partial K(Q)}{\partial Q},\ \ D(Q),\ \ \frac{\partial D(Q)}{\partial Q}\ \le K_2. \tag{2.6}$$

我们引入水分通量函数

$$p(z,t) = K(Q) - D(Q)\frac{\partial Q}{\partial z}, \tag{2.7}$$

它在陆面过程研究中是十分重要的. 为了将边界条件齐次化，令

$$\begin{cases} \bar{Q}(z,t) = Q(z,t) - \beta(t), \\ \bar{p}(z,t) = p(z,t) - q(t). \end{cases} \tag{2.8}$$

由于 $\beta(t)$ 相对于 t 的变化很小，我们假定 $\dfrac{d\beta}{dt} \approx 0$. 利用这种分裂，我们可以同时模拟土壤中的含水量和通过土壤中的水分通量. 利用 (2.7)-(2.8)，问题 (2.1)-(2.4) 可写为

求 $(\bar{Q},\bar{p})$ 使得对于任意的 $T>0$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial z} = S_r, & z\in(0,L),\ t\in(0,T); \\ D(Q)\dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial z} + \bar{p} = K(Q) - q(t), & z\in(0,L),\ t\in(0,T); \\ \bar{p}(0,t) = 0,\ \ \bar{Q}(L,t) = 0, & t\in(0,T); \\ \bar{Q}(z,0) = Q_0(z) - \beta(0), & 0\le z\le L. \end{cases} \tag{2.9}$$

设 $G=(0,L)$,$L^2(G)$ 表示在 G 上平方可积的 Lebesgue 空间，$H^1(G)$ 表示在 G 内直到一阶导数平方可积的 Sobolev 空间 (参见文献 [8]). 令 $H_E^1(G) = \{v\in H^1(G);\ v(L)=0\}$, $(\cdot,\cdot)$ 表示 G 上的 L^2 内积，即

$$(u,v) = \int_G u\cdot v\mathrm{d}z,\ \ \forall u,\ v\in L^2(G). \tag{2.10}$$

问题 (2.9) 的变分形式为：

求 $(\bar{Q},\bar{p}):[0,T]\to H_E^1(G)\times L^2(G)$ 使得： $\forall t\in(0,T)$,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial t}, v\right) - \left(\bar{p}, \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = (S_r, v), & \forall v\in H_E^1(G); \\ \left(D(Q)\dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial z}, w\right) + (\bar{p}, w) = (K(Q) - q(t), w), & \forall w\in L^2(G); \\ \bar{Q}(z,0) = Q_0(z) - \beta(0), & 0\le z\le L. \end{cases} \tag{2.11}$$

讨论问题 (2.11) 的混合广义解的存在性需要使用下面的引理 (参见 [9]).

引理 2.1. (Gronwall 引理) 设 $g(t)$ 在 $[0,T]$ 上正的可积函数，$c\ge 0$ 为常数. 如果 $\psi(t)\in C^0([0,T])$ 满足：

$$0\le\psi(t)\le c + \int_0^t g(s)\psi(s)ds,\quad \forall t\in[0,T],$$

那么 $\psi(t)$ 也满足：

$$0\le\psi(t)\le c\cdot\exp(\int_0^t g(s)ds),\quad t\in[0,T].$$

特别地，如果 $c=0$，那么 $\psi(t)\equiv 0$.

定理 2.2. 如果 $\beta(t)$ 和 $q(t)\in C^0[0,T]$，而且 S_r 和 $Q_0(z)\in L^2(G)$，那么问题 (2.11) 存在唯一的解 $(\bar{Q},\bar{p})\in H_E^1(G)\times L^2(G)$，并且存在常数 M_0 和 $\tilde{M}$ 使得

$$\sup_{0\le t\le T}\|\bar{Q}\|_{0,\infty}\le M_0,\quad \left|\frac{\partial\bar{Q}}{\partial z}\right|\le\tilde{M}. \tag{2.12}$$

证明. 1). 首先证明 (2.12) 和唯一性.

在 (2.11) 中取 $v=\bar{Q}$ 和 $w=\dfrac{\partial\bar{Q}}{\partial z}$ 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{Q}\|_0^2+\left(D(Q)\frac{\partial\bar{Q}}{\partial z},\frac{\partial\bar{Q}}{\partial z}\right)=(S_r,\bar{Q})+\left(K(Q)-q(t),\frac{\partial\bar{Q}}{\partial z}\right). \tag{2.13}$$

由 (2.6)、 Hölder 不等式和 Cauchy 不等式有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{Q}\|_0^2+K_1|\bar{Q}|_1^2\le\frac{1}{2}\|S_r\|_0^2+\frac{1}{2}\|\bar{Q}\|_0^2+\frac{K_2^2+\|q\|_0^2}{K_1}+\frac{K_1}{2}|\bar{Q}|_1^2. \tag{2.14}$$

因此，有

$$\|\bar{Q}\|_0^2+K_1\int_0^t|\bar{Q}|_1^2ds\le\frac{2(TK_2^2+E_0)}{K_1}+\int_0^t\|\bar{Q}\|_0^2ds,\ t\in[0,T], \tag{2.15}$$

其中 $E_0=\displaystyle\int_0^T(\|q\|_0^2+K_1\|S_r\|_0^2/2)ds$. 由 Gronwall 引理可得

$$\|\bar{Q}\|_0^2\le\frac{2(TK_2^2+E_0)}{K_1}\exp(T), \tag{2.16}$$

$$\int_0^t|\bar{Q}|_1^2ds\le\frac{2(TK_2^2+E_0)}{K_1}+\frac{2T(TK_2^2+E_0)}{K_1}\exp(T),\ t\in[0,T]. \tag{2.17}$$

由定积分的定义和 (2.17) 可得

$$|\bar{Q}|_1\le C_0\left(\frac{2(TK_2^2+E_0)}{K_1}+\frac{2T(TK_2^2+E_0)}{K_1}\exp(T)\right)^{1/2},\quad \left|\frac{\partial\bar{Q}}{\partial z}\right|\le\tilde{M}, \tag{2.18}$$

其中 C_0、 $\tilde{M}$ 和下文使用得 C_1 均为常数. 利用 Sobolev 空间的嵌入定理可得

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\|\bar{Q}\|_{0,\infty}&\le C_1\sup_{0\le t\le T}\|\bar{Q}\|_1\\&\le C_1\sup_{0\le t\le T}\left[C_0\left(\frac{2(TK_2^2+E_0)(1+T\exp(T))}{K_1}\right)^{1/2}\right]\\&\equiv M_0,\end{aligned} \tag{2.19}$$

即得 (2.12).

设 $(\bar{Q},\bar{p})$ 和 (Q^*,p^*) 是问题 (2.11) 的两个解，那么有

$$\left(\frac{\partial(\bar{Q}-Q^*)}{\partial t},v\right)-\left(\bar{p}-p^*,\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,\quad \forall v\in H_E^1(G); \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}&\left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial\bar{Q}}{\partial z}-D(Q^*+\beta)\frac{\partial Q^*}{\partial z},w\right)+(\bar{p}-p^*,w)\\&\qquad=(K(\bar{Q}+\beta)-K(Q^*+\beta),w),\quad \forall w\in L^2(G);\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\bar{Q}(z,0)=Q^*(z,0)=Q_0(z)-\beta(0),\quad z\in G. \tag{2.22}$$

在 (2.20) 中取 $v=\bar{Q}-Q^*$，而且在 (2.21) 中取 $w=\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-\frac{\partial Q^*}{\partial z}$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{Q}-Q^*\|_0^2 \quad &+ \quad \left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-D(Q^*+\beta)\frac{\partial Q^*}{\partial z},\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-\frac{\partial Q^*}{\partial z}\right)\\ &= \quad \left(K(\bar{Q}+\beta)-K(Q^*+\beta),\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-\frac{\partial Q^*}{\partial z}\right).\end{aligned} \tag{2.23}$$

利用 Hölder 不等式和 Cauchy 不等式，并由 (2.6) 和 (2.12) 有

$$\begin{aligned}&\left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-D(Q^*+\beta)\frac{\partial Q^*}{\partial z},\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-\frac{\partial Q^*}{\partial z}\right)\\ &\qquad=\left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-D(Q^*+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z},\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-\frac{\partial Q^*}{\partial z}\right)\\ &\qquad\quad+\left(D(Q^*+\beta)(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-\frac{\partial Q^*}{\partial z}),\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-\frac{\partial Q^*}{\partial z}\right)\\ &\qquad\geq K_1(|\bar{Q}-Q^*|_1^2-\left|\left([D(\bar{Q}+\beta)-D(Q^*+\beta)]\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z},\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-\frac{\partial Q^*}{\partial z}\right)\right|\\ &\qquad\geq K_1|\bar{Q}-Q^*|_1^2-K_2^2\tilde{M}\|\bar{Q}-Q^*\|_0|\bar{Q}-Q^*|_1\\ &\qquad\geq \frac{K_1}{2}|\bar{Q}-Q^*|_1^2-\frac{K_2^2\tilde{M}^2}{2K_1}\|\bar{Q}-Q^*\|_0,\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\left|\left(K(\bar{Q}+\beta)-K(Q^*+\beta),\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}-\frac{\partial Q^*}{\partial z}\right)\right| \quad &\leq \quad K_2\|\bar{Q}-Q^*\|_0|\bar{Q}-Q^*|_1\\ &\leq \quad \frac{K_2^2}{2K_1}\|\bar{Q}-Q^*\|_0^2+\frac{K_1}{2}|\bar{Q}-Q^*|_1^2.\end{aligned} \tag{2.25}$$

把 (2.24)–(2.25) 代入 (2.23) 可得

$$\frac{d}{dt}\|\bar{Q}-Q^*\|_0^2 \ \leq \frac{K_2^2+K_2^2\tilde{M}^2}{K_1}\|\bar{Q}-Q^*\|_0^2. \tag{2.26}$$

积分上式并由 Gronwall 引理即得 $\bar{Q}=Q^*$. 于是，从 (2.21) 得

$$(\bar{p}-p^*,w)=0,\quad \forall w\in L^2(G). \tag{2.27}$$

在 (2.27) 中取 $w=\bar{p}-p^*$ 即得 $\bar{p}=p^*$. 这就证明了问题 (2.11) 解的唯一性.

2). 证明问题 (2.11) 的解的存在性.

设 $\bar{Q}_n=Q_n-\beta$ 和 $Q_0=Q_0(z)$(其中 $Q_0(z)$ 是 (2.2) 中所给), 考虑下面线性化问题

$$\left(\frac{\partial \bar{Q}_n}{\partial t},v\right)-\left(\bar{p}_n,\frac{\partial v}{\partial z}\right)=(S_r,v),\quad \forall v\in H_E^1(G); \tag{2.28}$$

$$\left(D(Q_{n-1})\frac{\partial \bar{Q}_n}{\partial z},w\right)+(\bar{p}_n,w)=(K(Q_{n-1})-q(t),w),\quad \forall w\in L^2(G); \tag{2.29}$$

$$\bar{Q}_n(z,0)=Q_0(z)-\beta(0),\ 0\leq z\leq L,\ n=1,2,\cdots. \tag{2.30}$$

根据线性抛物型问题的理论 (参见 [10]) 任意得知问题 (2.28)–(2.30) 存在唯一的解序列 $\{(\bar{Q}_n,\bar{p}_n)\}_{n=1}^{\infty}$. 与 (2.16) 和 (2.17) 同理可证

$$\|\bar{Q}_n\|_0^2\leq \frac{2(TK_2^2+E_0)}{K_1}\exp(T),\ t\in[0,T],\quad \left|\frac{\partial \bar{Q}_n}{\partial z}\right|\leq \tilde{M}, \tag{2.31}$$

$$\int_0^T |\bar{Q}_n|_1^2 ds \le \frac{2(TK_2^2+E_0)}{K_1} + \frac{2T(TK_2^2+E_0)}{K_1}\exp(T),\ n=1,2,\cdots. \tag{2.32}$$

在 (2.29) 中取 $w=\bar{p}_n$, 并由 Hölder 不等式和 Cauchy 不等式可得

$$\int_0^T \|\bar{p}_n\|_0^2 ds \le M_1(T,K_1,K_2,E_0), \tag{2.33}$$

其中 $M_1(T,K_1,K_2,E_0)$ 是仅与 T,K_1,K_2 和 E_0 有关的常数. 从而 $\{\bar{Q}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是在 $L^2(0,T;H_E^1(G))$ 和 $L^2(G)$ 中一致有界的序列, 而且 $\{\bar{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是在 $L^2(0,T;L^2(G))$ 中一致有界的序列. 由 Hilbert 空间的弱紧致性可知 $\{\bar{Q}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是在 $H_E^1(G)$ 中存在弱收敛子序列的弱 * 收敛序列, 而且 $\{\bar{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是在 $L^2(G)$ 中存在弱收敛的子序列 (不妨仍然分别记为 $\{\bar{Q}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\bar{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$). 因此存在 $\bar{Q}$ 和 $\bar{p}$ 使得

$$\bar{Q}_n \xrightarrow{w\ w^*} \bar{Q},\quad \bar{p}_n \xrightarrow{w} \bar{p}\quad (n\to\infty). \tag{2.34}$$

由于弱收敛并弱 * 收敛的序列必强收敛, 即

$$\|\bar{Q}_n-\bar{Q}\|_1 \to 0 \quad (n\to\infty), \tag{2.35}$$

从而利用 (2.6) 和微分中值定理有

$$\begin{aligned}
&\left|\left(D(\bar{Q}_{n-1}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}_n}{\partial z} - D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}, w\right)\right| \\
&\quad\le \left|\left((D(\bar{Q}_{n-1}+\beta)-D(\bar{Q}+\beta))w, \frac{\partial \bar{Q}_n}{\partial z}\right) + \left(D(\bar{Q}+\beta)w, \frac{\partial \bar{Q}_n}{\partial z}-\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}\right)\right| \\
&\quad\le (K_2\tilde{M}\|\bar{Q}_{n-1}-\bar{Q}\|_0 + K_2|\bar{Q}_n-\bar{Q}|_1)\|w\|_0 \to 0,\quad n\to\infty
\end{aligned} \tag{2.36}$$

和

$$|(K(\bar{Q}_{n-1}+\beta)-K(\bar{Q}+\beta), w)| \le K_2\|\bar{Q}_{n-1}-\bar{Q}\|_0\|w\|_0 \to 0,\ n\to\infty. \tag{2.37}$$

用 $\forall\chi(t)\in C^1[0,T]$, $\chi(T)=0$ 乘 (2.28) 再积分, 并利用分部积分公式可得

$$-\int_0^T(\bar{Q}_n, v\chi'(t))dt - \int_0^T\left(\bar{p}_n, \frac{\partial v}{\partial z}\chi(t)\right)dt = \int_0^T(S_r, v\chi(t))dt,\ \forall v\in H_E^1(G). \tag{2.38}$$

在 (2.38) 、 (2.29) 和 (2.30) 中取 n 趋于 ∞ 的极限, 再用分部积分公式, 并由 $\chi(t)$ 的任意性和 (2.34)–(2.38) 即得 (2.34) 的 $(\bar{Q},\bar{p})$ 满足 (2.11). 定理 2.2 证毕.

3. 半离散化混合元解的存在性及其误差估计

设

$$\Im_h = \{e_i; e_i=[x_i,x_{i+1}], 0\le i\le l\} \tag{3.1}$$

是 $\bar{G}$ 的正规剖分, 即存在正数 $\bar{c}$ 使得任意 $e_i\in\Im_h$ 的长度不超过 $\bar{c}h$, 其中 h 表示 $e_i(0\le i\le l)$ 的最长者. 令

$$V_h = \{v_h\in H_E^1(G)\cap C^0(\bar{G})\ ;\ v_{h|e_i}\in P_\kappa(e_i), \forall e_i\in\Im_h\}, \tag{3.2}$$

$$W_h = \{w_h\in L^2(G)\ ;\ w_{h|e_i}\in P_m(e_i), \forall e_i\in\Im_h\}, \tag{3.3}$$

其中 $m\ge 0$ 和 $1\le\kappa\le m+1$ 是整数, $P_m(e_i)$ 表示定义在 e_i 上的次数 $\le m$ 的多项式空间.

注意：从现在起，C 表示与剖分参数 h 和 k(参见 §4) 无关的常数.

根据投影性质和对偶原理 (参见 [11,12]) 可有下面两引理.

引理 3.1. 存在算子 $P_h: H_E^1(G) \to V_h$ 使得对于任意的 $v \in H_E^1(G)$ 都有

$$(v - P_h v, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h, \quad \|P_h v\|_0 \le \|v\|_0. \tag{3.4}$$

而且当 $v \in H^r(G)$ 时，有

$$\|v - P_h v\|_s \le Ch^{r-s}|v|_r, \quad s = 0, 1; \quad s \le r \le \kappa + 1. \tag{3.5}$$

引理 3.2. 存在算子 $r_h: L^2(G) \to W_h$ 使得对于任意的 $w \in L^2(G)$ 都有

$$(w - r_h w, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in X_h; \quad \|r_h w\|_0 \le \|w\|_0. \tag{3.6}$$

而且当 $w \in H^r(G)$ 时，有

$$\|w - r_h w\|_s \le Ch^{r-s}|w|_r, \quad s = 0, 1; \quad s \le r \le m + 1. \tag{3.7}$$

附注：由于 $G \subset R$，所以对于任意的 $v_h \in V_h$ 都有 $\dfrac{\partial v}{\partial z} \in W_h$，从而利用引理 3.2 和引理 3.2 容易验证 V_h 和 W_h 满足离散的 LBB 条件 [9]. 而当 $G \subset R^2$ 时，可以利用 Raviart–Thomas 元 [12] 作为有限元空间.

考虑问题 (2.11) 的半离散化格式：

求 $(\bar{Q}_h, \bar{p}_h): [0,T] \to V_h \times W_h$ 使得对于任意的 $t \in (0,T)$ 满足

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \bar{Q}_h}{\partial t}, v_h\right) - \left(\bar{p}_h, \dfrac{\partial v_h}{\partial z}\right) = (S_r, v_h), & \forall v_h \in V_h; \\ \left(D(Q_h)\dfrac{\partial \bar{Q}_h}{\partial z}, w_h\right) + (\bar{p}_h, w_h) = (K(Q_h) - q(t), w_h), & \forall w_h \in W_h; \\ \bar{Q}_h(z,0) = P_h Q_0(z) - \beta(0), & 0 \le z \le L. \end{cases} \tag{3.8}$$

定理 3.3. 在定理 2.2 的条件下，问题 (3.8) 存在唯一的解 $(\bar{Q}_h, \bar{p}_h) \in V_h \times W_h$，并且存在与 h 无关的常数 M_1 使得

$$\sup_{0 \le t \le T} \|\bar{Q}_h\|_{0,\infty} \le M_1; \quad \int_0^T \|\bar{p}_h\|_0^2 ds \le M_1. \tag{3.9}$$

证明. 由于 $V_h \subset H_E^1(G)$，则由 (2.6) 有

$$\begin{aligned} K_1 &\le \inf_{Q \in H_E^1(G)} \left\{ K(Q), \frac{\partial K(Q)}{\partial Q}, D(Q), \frac{\partial D(Q)}{\partial Q} \right\} \\ &\le \inf_{\phi_h \in V_h} \left\{ K(\phi_h), \frac{\partial K(\phi_h)}{\partial \phi_h}, D(\phi_h), \frac{\partial D(\phi_h)}{\partial \phi_h} \right\} \\ &\le K(Q_h), \frac{\partial K(Q_h)}{\partial Q_h}, D(Q_h), \frac{\partial D(Q_h)}{\partial Q_h} \\ &\le \sup_{\phi_h \in V_h} \left\{ K(\phi_h), \frac{\partial K(\phi_h)}{\partial \phi_h}, D(\phi_h), \frac{\partial D(\phi_h)}{\partial \phi_h} \right\} \\ &\le \sup_{Q \in H_E^1(G)} \left\{ K(Q), \frac{\partial K(Q)}{\partial Q}, D(Q), \frac{\partial D(Q)}{\partial Q} \right\} \le K_2, \end{aligned}$$

在 (3.8) 中取 $v_h = \bar{Q}_h$ 和 $w_h = \dfrac{\partial \bar{Q}_h}{\partial z}$，并与 (2.19) 和 (2.33) 的证明同理可得 (3.9). 由于问题 (3.8) 是非线性常微分方程，从而 (3.9) 保证了 (3.8) 的解存在. 再与定理 2.2 同理可以证明 (3.8) 的解是唯一的. 定理 3.3 证毕.

定理 3.4. 在定理 3.3 的条件下，如果 $S_r \in H^m(G)$，而且问题 (2.11) 的解 $(\bar{Q}, \bar{p}) \in H^{m+2}(G) \times H^{m+1}(G)$，则当 $\kappa = m+1$ 时，下面的估计成立

$$\|\bar{Q} - \bar{Q}_h\|_{L^2(H^1)} + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{L^2(L^2)} \leq Ch^{m+1}, \tag{3.10}$$

其中 C 是仅与 $\|\bar{Q}\|_{L^2(H^{m+2})}$ 和 $\|\bar{p}\|_{L^2(H^{m+1})}$ 有关的常数，$\|\cdot\|_{L^2(H^{m+1})}$ 表示空间 $L^2(0,T; H^{m+1}(G))$ 的范数.

证明. 在 (2.11) 中取 $v = v_h$ 和 $w = w_h$，并与 (3.8) 相减可得下面的误差方程

$$\left(\frac{\partial(\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial t}, v_h\right) - \left(\bar{p} - \bar{p}_h, \frac{\partial v_h}{\partial z}\right) = 0, \quad \forall v_h \in V_h; \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}&\left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} - D(\bar{Q}_h+\beta)\frac{\partial \bar{Q}_h}{\partial z}, w_h\right) + (\bar{p} - \bar{p}_h, w_h)\\ &\qquad = (K(\bar{Q}+\beta) - K(\bar{Q}_h+\beta), w_h), \quad \forall w_h \in W_h;\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\bar{Q}(z,0) - \bar{Q}_h(z,0) = Q_0(z) - P_h Q_0(z), \quad z \in G. \tag{3.13}$$

由 (3.11)–(3.12) 和引理 3.1–3.2 有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial(\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial t}, \bar{Q} - \bar{Q}_h\right) &= \left(\frac{\partial(\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial t}, \bar{Q} - P_h\bar{Q}\right) + \left(\frac{\partial(\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial t}, P_h\bar{Q} - \bar{Q}_h\right)\\
&= \left(\frac{\partial(\bar{Q} - P_h\bar{Q})}{\partial t}, \bar{Q} - P_h\bar{Q}\right) + \left(\bar{p} - \bar{p}_h, \frac{\partial(P_h\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial z}\right)\\
&= \left(\frac{\partial(\bar{Q} - P_h\bar{Q})}{\partial t}, \bar{Q} - P_h\bar{Q}\right) + \left(K(\bar{Q}+\beta) - K(\bar{Q}_h+\beta), \frac{\partial(P_h\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial z}\right)\\
&\quad - \left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} - D(\bar{Q}_h+\beta)\frac{\partial \bar{Q}_h}{\partial z}, \frac{\partial(P_h\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial z}\right)\\
&= \left(\frac{\partial(\bar{Q} - P_h\bar{Q})}{\partial t}, \bar{Q} - P_h\bar{Q}\right) + \left(K(\bar{Q}+\beta) - K(\bar{Q}_h+\beta), \frac{\partial(P_h\bar{Q} - \bar{Q})}{\partial z}\right)\\
&\quad - \left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} - D(\bar{Q}_h+\beta)\frac{\partial \bar{Q}_h}{\partial z}, \frac{\partial(P_h\bar{Q} - \bar{Q})}{\partial z}\right)\\
&\quad + \left(K(\bar{Q}+\beta) - K(\bar{Q}_h+\beta), \frac{\partial(\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial z}\right)\\
&\quad - \left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} - D(\bar{Q}_h+\beta)\frac{\partial \bar{Q}_h}{\partial z}, \frac{\partial(\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial z}\right).\end{aligned} \tag{3.14}$$

与 (2.24) 和 (2.25) 的证明同理可得

$$\begin{aligned}&\left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} - D(\bar{Q}_h+\beta)\frac{\partial \bar{Q}_h}{\partial z}, \frac{\partial(\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial z}\right)\\ &\geq \frac{3K_1}{4}|\bar{Q} - \bar{Q}_h|_1^2 - \frac{K_2^2\tilde{M}^2}{K_1}\|\bar{Q} - \bar{Q}_h\|_0.\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\left(K(\bar{Q}+\beta) - K(\bar{Q}_h+\beta), \frac{\partial(\bar{Q} - \bar{Q}_h)}{\partial z}\right) \leq \frac{K_1}{4}|\bar{Q} - \bar{Q}_h|_1^2 + \frac{K_2^2}{K_1}\|\bar{Q} - \bar{Q}_h\|_0, \tag{3.16}$$

$$\left|\left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial\bar{Q}}{\partial z}-D(\bar{Q}_h+\beta)\frac{\partial\bar{Q}_h}{\partial z},\frac{\partial(P_h\bar{Q}-\bar{Q})}{\partial z}\right)\right|\le\frac{K_1}{4}|\bar{Q}-\bar{Q}_h|_1^2 +C(|\bar{Q}-P_h\bar{Q}|_1^2+\|\bar{Q}-\bar{Q}_h\|_0^2),\tag{3.17}$$

$$\left(K(\bar{Q}+\beta)-K(\bar{Q}_h+\beta),\frac{\partial(P_h\bar{Q}-\bar{Q})}{\partial z}\right)\le C(|\bar{Q}-P_h\bar{Q}|_1^2+\|\bar{Q}-\bar{Q}_h\|_0^2).\tag{3.18}$$

结合 (3.14)-(3.17) 和 (3.18) 可得

$$\frac{d}{dt}\|\bar{Q}-\bar{Q}_h\|_0^2+\frac{K_1}{4}|\bar{Q}-\bar{Q}_h|_1^2\le\frac{d}{dt}\|\bar{Q}-P_h\bar{Q}\|_0^2+C(|\bar{Q}-P_h\bar{Q}|_1^2+\|\bar{Q}-\bar{Q}_h\|_0^2).\tag{3.19}$$

从 0 到 $t\in[0,\ T]$ 积分 (3.19), 并利用 Gronwall 引理和引理 3.1–3.2 可得

$$\|\bar{Q}-\bar{Q}_h\|_0^2+\|\bar{Q}-\bar{Q}_h\|_{L^2(H^1)}^2\le Ch^{m+1}.\tag{3.20}$$

在 (3.12) 中取 $w_h=r_h\bar{p}-\bar{p}_h$ 有

$$\begin{aligned}\|\bar{p}-\bar{p}_h\|_0^2&=(\bar{p}-\bar{p}_h,\bar{p}-r_h\bar{p})+(\bar{p}-\bar{p}_h,r_h\bar{p}-\bar{p}_h)\\&=\|\bar{p}-r_h\bar{p}\|_0^2+(K(\bar{Q}+\beta)-K(\bar{Q}_h+\beta),r_h\bar{p}-\bar{p}_h)\\&\quad-\left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial\bar{Q}}{\partial z}-D(\bar{Q}_h+\beta)\frac{\partial\bar{Q}_h}{\partial z},r_h\bar{p}-\bar{p}_h\right)\\&\le\frac{1}{2}\|\bar{p}-\bar{p}_h\|_0^2+C(\|\bar{Q}-\bar{Q}_h\|_0^2+|\bar{Q}-\bar{Q}_h|_1^2+\|\bar{p}-r_h\bar{p}\|_0^2).\end{aligned}\tag{3.21}$$

从 0 到 T 积分 (3.21) 并用 (3.20) 和引理 3.2 可得

$$\|\bar{p}-\bar{p}_h\|_{L^2(L^2)}\le Ch^{m+1}.\tag{3.22}$$

结合 (3.22) 和 (3.20) 即得 (3.10). 定理 3.4 证毕.

附注. 在 (3.20) 中的 $\|\bar{Q}-\bar{Q}_h\|_0$ 的估计不是最优阶的. 利用 Ritz 对偶原理可以得到下面的最优解估计

$$\|\bar{Q}-\bar{Q}_h\|_0\le Ch^{m+2}.\tag{3.23}$$

4. 全离散化混合元解的存在性及其误差估计

设 N 是正整数, $k=T/N$ 是时间步长, $t_n=nk(0\le n\le N)$,$(\bar{Q}_h^n,\bar{p}_h^n)\in V_h\times W_h$ 是 $(\bar{Q}(t_n),\bar{p}(t_n))\equiv(\bar{Q}^n,\bar{p}^n)$ 的混合有限元逼近. 那么问题 (2.11) 的全离散化混合元解为:

求 $(\bar{Q}_h^{n+1},\bar{p}_h^{n+1})\in V_h\times W_h$ 使得 $(0\le n\le N-1)$:

$$\begin{cases}(\bar{Q}_h^{n+1},v_h)-k\left(\bar{p}_h^{n+1},\dfrac{\partial v_h}{\partial z}\right)=k(S_r,v)+(\bar{Q}_h^n,v_h), & \forall v_h\in V_h;\\ \left(D(Q_h^n)\dfrac{\partial\bar{Q}_h^{n+1}}{\partial z},w_h\right)+(\bar{p}_h^{n+1},w_h)=(K(Q_h^n)-q(t_n),w_h), & \forall w_h\in W_h;\\ \bar{Q}_h^0=P_hQ_0(z)-\beta(0), & 0\le z\le L,\end{cases}\tag{4.1}$$

为了讨论问题 (4.1) 的解的存在性和误差估计, 需要下面的离散 Gronwall 引理 (参见 [9]).

引理 4.1. 如果 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 是正的序列且 $\{c_n\}$ 是单调递增，并满足

$$a_n + b_n \le c_n + \bar{\lambda}\sum_{j=0}^{n-1} a_j, \quad n \ge 1, \ \ \bar{\lambda} > 0; \tag{4.2}$$

$$a_0 + b_0 \le c_0, \tag{4.3}$$

那么有

$$a_n + b_n \le c_n \exp(\bar{\lambda} n), \quad n \ge 0. \tag{4.4}$$

定理 4.2. 在定理 2.2 和定理 3.3–3.4 的条件下，当 k 充分小时，问题 (4.1) 存在唯一的解 $(\bar{Q}_h^n, \bar{p}_h^n) \in V_h \times W_h (0 \le n \le N)$ 使得下面的误差估计成立

$$\begin{aligned} \|\bar{Q}^{n+1} - \bar{Q}_h^{n+1}\|_0 \ &+ \ k^{1/2}\sum_{i=1}^{n+1}\|\bar{Q}^i - \bar{Q}_h^i\|_1 + \|\bar{p}^{n+1} - \bar{p}_h^{n+1}\|_0 \\ &\le \ C(k + h^{m+1}),\ n = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1;\ \text{当}\kappa = m+1\text{时}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

证明. 设 $\bar{Q}_h^n = \sum_{i=1}^{r_1} x_i(t_n)\varphi_i(z)$ 和 $\bar{p}_h^n = \sum_{j=1}^{r_2} y_i(t_n)\psi_j(z)$，其中 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{r_1} \subset V_h$ 和 $\{\psi_j\}_{j=1}^{r_2} \subset W_h$ 分别是两组正交基，则问题 (4.1) 可写为

求 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_{r_1})$ 和 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_{r_2})$ 满足

$$\begin{pmatrix} A_1 & kB_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

其中 $A_1 = ((\varphi_i, \varphi_j))_{r_1 \times r_1}$ 和 $A_2 = ((\psi_i, \psi_j))_{r_2 \times r_2}$ 分别是两个正定矩阵， 而 $B_1 = ((\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}, \psi_j))_{r_1 \times r_2}$, $B_2 = ((D(\bar{Q}_h^n + \beta)\psi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}))_{r_2 \times r_1}$. 由问题 (4.1) 可知 (4.6) 右端项的 F_1 和 $F2$ 的含义. 由于

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ B_2 A_1^{-1} & I_{r_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & kB_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & kA_1^{-1}B_1 \\ 0 & kB_2A_1^{-1}B_1 + A_2 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

而且当 k 充分小时 $kB_2A_1^{-1}B_1 + A_2$ 是可逆的，因此 (4.6) 的系数矩阵可逆. 从而问题 (4.1) 存在唯一的解.

记 $\bar{\partial}_t \bar{Q}^n = (\bar{Q}^n - \bar{Q}^{n-1})/k$. 在 (2.11) 中取 $t = t_{n+1}$, $v = v_h$, $w = w_h$, 并与 (4.1) 相减可得下面误差方程

$$\left(\frac{\partial \bar{Q}^{n+1}}{\partial t} - \bar{\partial}_t \bar{Q}^{n+1}, v_h\right) - \left(\bar{p}^{n+1} - \bar{p}_h^{n+1}, \frac{\partial v_h}{\partial z}\right) = 0, \quad \forall v_h \in V_h; \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \left(D(\bar{Q}^{n+1} + \beta)\frac{\partial \bar{Q}^{n+1}}{\partial z} - D(\bar{Q}_h^n + \beta)\frac{\partial \bar{Q}_h^{n+1}}{\partial z}, w_h\right) + \left(\bar{p}^{n+1} - \bar{p}_h^{n+1}, w_h\right) \\ = \left(K(\bar{Q}^{n+1} + \beta) - K(\bar{Q}_h^n + \beta), w_h\right), \quad \forall w_h \in W_h; \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\bar{Q}^0 - \bar{Q}_h^0 = Q_0(z) - P_h Q(0), \quad z \in G. \tag{4.10}$$

记 $\xi^n = P_h\bar{Q}^n - \bar{Q}_h^n$, 从 (4.8)-(4.9) 和 (4.1) 得

$$
\begin{aligned}
(\bar{\partial}_t\xi^{n+1},\xi^{n+1}) &= (\bar{\partial}_t P_h\bar{Q}^{n+1} - \bar{\partial}_t\bar{Q}_h^{n+1},\xi^{n+1}) \\
&= (\bar{\partial}_t P_h\bar{Q}^{n+1},\xi^{n+1}) - \left(\bar{p}_h^{n+1},\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right) \\
&= \left(\bar{\partial}_t P_h\bar{Q}^{n+1} - \frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial t},\xi^{n+1}\right) - \left(\bar{p}_h^{n+1} - \bar{p}^{n+1},\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right) \\
&= \left(\bar{\partial}_t\bar{Q}^{n+1} - \frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial t},\xi^{n+1}\right) + \left(K(Q^{n+1}) - K(Q_h^n),\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right) \\
&\quad - \left(D(\bar{Q}^{n+1}+\beta)\frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial z} - D(\bar{Q}_h^n+\beta)\frac{\partial\bar{Q}_h^{n+1}}{\partial z},\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&(K(Q^{n+1}) - K(Q_h^n),\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}) = (K(\bar{Q}^{n+1}+\beta) - K(\bar{Q}_h^n+\beta),\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}) \\
&\quad = (K(\bar{Q}^{n+1}+\beta) - K(\bar{Q}^n+\beta) + K(\bar{Q}^n+\beta) - K(\bar{Q}_h^n+\beta),\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}) \\
&\quad \le Ck^2 + C\|\bar{Q}^n - \bar{Q}_h^n\|_0^2 + \frac{K_1}{8}|\xi^{n+1}|_1^2,
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(D(\bar{Q}^{n+1}+\beta)\frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial z} - D(\bar{Q}_h^n+\beta)\frac{\partial\bar{Q}_h^{n+1}}{\partial z},\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right) \\
&\quad = \left([D(\bar{Q}^{n+1}+\beta) - D(\bar{Q}^n+\beta)]\frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial z},\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right) \\
&\qquad + \left([D(\bar{Q}^n+\beta) - D(\bar{Q}_h^n+\beta)]\frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial z},\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right) \\
&\qquad + \left(D(\bar{Q}_h^n+\beta)\left[\frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial z} - \frac{\partial\bar{Q}_h^{n+1}}{\partial z}\right],\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right),
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

$$
\left|\left([D(\bar{Q}^{n+1}+\beta) - D(\bar{Q}^n+\beta)]\frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial z},\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right)\right| \le Ck^2 + \frac{K_1}{8}|\xi^{n+1}|_1^2,
\tag{4.14}
$$

$$
\left([D(\bar{Q}^n+\beta) - D(\bar{Q}_h^n+\beta)]\frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial z},\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right) \ge -\frac{K_1}{8}|\xi^{n+1}|_1^2 - C\|\bar{Q}^n - \bar{Q}_h^n\|_0^2,
\tag{4.15}
$$

又由于由引理 3.1 有

$$
\left|\left(D(\bar{Q}_h^n+\beta)\frac{\partial(\bar{Q}^{n+1} - P_h\bar{Q}^{n+1})}{\partial z},\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right)\right| \le Ch^{2(m+1)} + \frac{K_1}{8}|\xi^{n+1}|_1^2,
\tag{4.16}
$$

$$
\left(D(\bar{Q}_h^n+\beta)\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z},\frac{\partial\xi^{n+1}}{\partial z}\right) \ge K_1|\xi^{n+1}|_1^2,
\tag{4.17}
$$

所以结合 (4.11)-(4.16) 和 (4.17), 并利用 $(a-b)a=[a^2-b^2+(a-b)^2]/2$ 和引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\|\xi^{n+1}\|_0^2-\|\xi^n\|_0^2+kK_1|\xi^{n+1}|_1^2 \quad \leq \quad & k\|\xi^{n+1}\|_0^2+Ck(k^2+h^{2(m+1)}) \\ & +Ck\|\xi^n\|_0^2+k\|\bar{\partial}_t\bar{Q}^{n+1}-\frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial t}\|_0^2.\end{aligned} \tag{4.18}$$

对 (4.18) 从 0 到 n 作和, 并注意到 $\xi^0=0$ 可得

$$\begin{aligned}\|\xi^{n+1}\|_0^2+kK_1\sum_{i=1}^{n+1}|\xi^i|_1^2 \quad \leq \quad & k\|\xi^{n+1}\|_0^2+C(k^2+h^{2(m+1)}) \\ & +Ck\sum_{i=0}^{n}\|\xi^i\|_0^2+k\sum_{i=1}^{n+1}\|\bar{\partial}_t\bar{Q}^i-\frac{\partial\bar{Q}^i}{\partial t}\|_0^2.\end{aligned} \tag{4.19}$$

再注意到

$$\|\bar{\partial}_t\bar{Q}^i-\frac{\partial\bar{Q}^i}{\partial t}\|_0=\|k^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_{i-1})\bar{Q}_{tt}ds\|_0\leq Ck. \tag{4.20}$$

则当 k 充分小 (例如 $k\leq 1/2$) 时, 由 (4.19) 可得

$$\|\xi^{n+1}\|_0^2+k\sum_{i=1}^{n+1}|\xi^i|_1^2\leq C(k^2+h^{2(m+1)})+Ck\sum_{i=0}^{n}\|\xi^i\|_0^2. \tag{4.21}$$

在引理 4.1 中取 $a_n=\|\xi^n\|_0^2$, $b_n=k\sum_{i=1}^n|\xi^i|_1^2$, $c_n=C(k^2+h^{2(m+1)})$, 并定义 $b_0=0$, 由于 $a_0=0$, 从而得

$$\|\xi^{n+1}\|_0^2+k\sum_{i=1}^{n+1}|\xi^i|_1^2\leq C(k^2+h^{2(m+1)}). \tag{4.22}$$

从而, 利用引理 3.1 得

$$\begin{aligned}\|\bar{Q}^{n+1}-\bar{Q}_h^{n+1}\|_0 \quad + \quad & k^{1/2}\sum_{i=1}^{n+1}|\bar{Q}^i-\bar{Q}_h^i|_1\leq\|\bar{Q}^{n+1}-P_h\bar{Q}^{n+1}\|_0+\|\xi^{n+1}\|_0 \\ + \quad & k^{1/2}\sum_{i=1}^{n+1}|\bar{Q}^i-P_h\bar{Q}^i|_1+k^{1/2}\sum_{i=1}^{n+1}|\xi^i|_1\leq C(k+h^{m+1}).\end{aligned} \tag{4.23}$$

在 (4.9) 中取 $w_h=r_h\bar{p}^{n+1}-\bar{p}_h^{n+1}$, 并用引理 3.2 和 (4.23) 可得

$$\begin{aligned}\|\bar{p}^{n+1}-\bar{p}_h^{n+1}\|_0^2 &= (\bar{p}^{n+1}-r_h\bar{p}^{n+1},\bar{p}^{n+1}-r_h\bar{p}^{n+1})+(\bar{p}^{n+1}-\bar{p}_h^{n+1},r_h\bar{p}^{n+1}-\bar{p}_h^{n+1}) \\ &= \|\bar{p}^{n+1}-r_h\bar{p}^{n+1}\|_0^2+\left(K(\bar{Q}^{n+1}+\beta)-K(\bar{Q}_h^n+\beta),r_h\bar{p}^{n+1}-\bar{p}_h^{n+1}\right) \\ &\quad -\left(D(\bar{Q}^{n+1}+\beta)\frac{\partial\bar{Q}^{n+1}}{\partial z}-D(\bar{Q}_h^n+\beta)\frac{\partial\bar{Q}_h^{n+1}}{\partial z},r_h\bar{p}^{n+1}-\bar{p}_h^{n+1}\right) \\ &\leq Ck^2+Ch^{2(m+1)}+\frac{1}{2}\|\bar{p}^{n+1}-\bar{p}_h^{n+1}\|_0^2.\end{aligned} \tag{4.24}$$

从而得

$$\|\bar{p}^{n+1}-\bar{p}_h^{n+1}\|_0\leq C(k+h^{m+1}). \tag{4.25}$$

结合 (4.23) 和 (4.25) 即得 (4.5). 定理 4.2 证毕.

5. 非饱和水流问题的数值模拟

本节给出一些非饱和水流问题的数值模拟的例子以说明混合元法的优点. 不失一般性, 不妨取 $S_r=0$. 取 V_h 和 W_h 都是分段线性函数空间. 令 e_i 的长度为 h_i, $i=0,1,\cdots,l$. 则

在每个单元 e_i 上的一次插值基函数为

$$N_i = (z_{i+1} - z)/h_i, \quad M_{i+1} = (z - z_i)/h_i. \tag{5.1}$$

在每个单元 e_i 上，令

$$\bar{Q}_h^n|_{e_i} = N_i\bar{Q}_i^n + M_{i+1}\bar{Q}_{i+1}^n, \quad \bar{p}_h^n|_{e_i} = N_i\bar{p}_i^n + M_{i+1}\bar{p}_{i+1}^n. \tag{5.2}$$

并取

$$D(Q_h^n)|_{e_i} = D(Q_i^n) \equiv D_i^n, \ \ K(Q_h^n)|_{e_i} = K(Q_i^n) \equiv K_i^n, \ Q_i^n = \bar{Q}_i^n + \beta(t_n). \tag{5.3}$$

于是，问题 (4.1) 在每个单元 e_i 上的刚度矩阵、未知向量和右端项可表示为：

$$\begin{pmatrix} h_i/3 & h_i/6 & k/2 & k/2 \\ h_i/6 & h_i/3 & -k/2 & -k/2 \\ -D_i^n/2 & D_i^n/2 & h_i/3 & h_i/6 \\ -D_i^n/2 & D_i^n/2 & h_i/6 & h_i/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{Q}_i^{n+1} \\ \bar{Q}_{i+1}^{n+1} \\ \bar{p}_i^{n+1} \\ \bar{p}_{i+1}^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_i\bar{Q}_i^n/3 + h_i\bar{Q}_{i+1}^n/6 \\ h_i\bar{Q}_i^n/6 + h_i\bar{Q}_{i+1}^n/3 \\ h_iK_i^n/2 - h_iq(t_n)/2 \\ h_iK_i^n/2 - h_iq(t_n)/2 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

为了形成总体方程，将单元刚度矩阵和未知向量适当变换为

$$\begin{pmatrix} 2h_i & 3k & h_i & 3k \\ h_i & -3k & 2h_i & -3k \\ -3D_i^n & 2h_i & 3D_i^n & h_i \\ -3D_i^n & h_i & 3D_i^n & 2h_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{Q}_i^{n+1} \\ \bar{p}_i^{n+1} \\ \bar{Q}_{i+1}^{n+1} \\ \bar{p}_{i+1}^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2h_i\bar{Q}_i^n + h_i\bar{Q}_{i+1}^n \\ h_i\bar{Q}_i^n + 2h_i\bar{Q}_{i+1}^n \\ 3h_iK_i^n - 3h_iq(t_n) \\ 3h_iK_i^n - 3h_iq(t_n) \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

利用有限元法的总体合成技术（参见文献 [11,12]），(4.1) 可组成方程组如下：

$$\begin{pmatrix} D_0 & \bar{D}_0 & O & \cdots & O & O & O \\ C_0 & D_1 & \bar{D}_1 & \cdots & O & O & O \\ O & C_1 & D_2 & \cdots & O & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & \cdots & D_{l-1} & \bar{D}_{l-1} & O \\ O & O & O & \cdots & C_{l-1} & D_l & \bar{D}_l \\ O & O & O & \cdots & O & C_l & D_{l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0^{n+1} \\ X_1^{n+1} \\ X_2^{n+1} \\ \cdots \\ X_{l-1}^{n+1} \\ X_l^{n+1} \\ X_{l+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ \cdots \\ G_{l-1} \\ G_l \\ G_{l+1} \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

$$Q_i^n = \bar{Q}_i^n + \beta(t_n); \ \ p_i^n = \bar{p}_i^n + q(t_n), \ i = 0, 1, ..., l+1, \ n = 0, 1, ..., N, \tag{5.7}$$

其中

$$\bar{D}_i = \begin{pmatrix} h_i & 3k \\ 2h_i & -3k \end{pmatrix}; \ \ C_i = \begin{pmatrix} -3D_{i-1}^n & 2h_i \\ -3D_{i-1}^n & h_i \end{pmatrix}, \ \ i = 0, 1, \cdots, l; \tag{5.8}$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ \ D_0 = \begin{pmatrix} 2h_0 & 3k \\ h_0 & -3k \end{pmatrix}, \ \ D_{l+1} = \begin{pmatrix} 1 + 3D_l^n & h_l \\ 3D_l^n & 2h_l \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

$$D_i = \begin{pmatrix} 2h_i + 3D_{i-1}^n & 3k + h_{i-1} \\ h_i + 3D_{i-1}^n & -3k + 2h_{i-1} \end{pmatrix}, \ \ i = 1, 2, \cdots, l; \tag{5.10}$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} 2h_0\bar{Q}_0^n + h_0\bar{Q}_1^n \\ h_0\bar{Q}_0^n + 2h_0\bar{Q}_1^n \end{pmatrix}, \quad G_{l+1} = \begin{pmatrix} 3h_lK_{l-1}^n - 3h_lq(t_n) \\ 3h_lK_{l-1}^n - 3h_lq(t_n) \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

$$G_i = \begin{pmatrix} 2h_i\bar{Q}_i^n + h_i\bar{Q}_i^n + 3h_{i-1}K_{i-1}^n - 3h_{i-1}q(t_n) \\ h_i\bar{Q}_i^n + 2h_i\bar{Q}_i^n + 3h_{i-1}K_{i-1}^n - 3h_{i-1}q(t_n) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, l; \tag{5.12}$$

$$X_i^{n+1} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_i^{n+1} \\ \bar{p}_i^{n+1} \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, l+1. \tag{5.13}$$

因此, 只要给定空间步长 h_i 、时间步长 k 以及初边值和参数 K_s 、 b 、 ψ_s 的值, 就可以由式 (5.6) 和 (5.7) 求出问题 (4.1) 的混合元解, 即含水量和水分通量的数值解.

如果原问题是第一边值条件, 即左边界的含水量 $Q(0,t)$ 给定时, 只需在齐次化边界条件时稍加改变, 并将 $G_i(i \ge 1)$ 中的 q 去掉, 而将 (5.6) 中系数矩阵第一行第一列 (即左上角) 的元素加上 1, 其余元素都不变.

在陆面及大气环流模式中, 将全球土壤作某些典型分类, 并对格点标定土壤参数类型, 按照 Dickinson 等的 BATS 模式文本 (参见 [13]) 对 12 种土壤给出的参数列表如下.

表 1. 12 种土壤参数

土壤种类/ 参数	Q_s	$-\psi_s/(\mathrm{mm})$	$K_s/(\mathrm{mms}^{-1})$	b	Q_r/Q_s
1	0.33	30	0.2000	3.5	0.088
2	0.36	30	0.0800	4.0	0.119
3	0.39	30	0.0032	4.5	0.151
4	0.42	200	0.0130	5.0	0.266
5	0.45	200	8.9e-3	5.5	0.300
6	0.48	200	6.3e-3	6.0	0.332
7	0.51	200	4.5e-3	6.8	0.378
8	0.54	200	3.2e-3	7.6	0.419
9	0.57	200	2.2e-3	8.4	0.455
10	0.60	200	1.6e-3	9.2	0.487
11	0.63	200	1.1e-3	10.0	0.516
12	0.66	200	0.8e-3	10.8	0.542

下面以第 8 种土壤参数为例给出入渗蒸发问题混合有限元解模拟结果.

第 8 种土壤参数为: $Q_s = 0.54$, $\psi_s = -200$ (mm), $K_s = 3.2 \times 10^{-3}$(mm/s), $B = 7.6$, $Q_r/Q_s = 0.419$, $L = 200$ cm. 取时间步长为 $k = 0.5$ 小时, 空间步长 $h_i = 1$cm, 将区域 $\bar{\Omega} = [0, 200]$ 分为 200 个相等的单元. 假设在土壤表面 ($z = 0$) 保持一段时间的定常入渗通量 $q = 0.1$cm/h, $\beta(t) = 0.54 \times 0.419$, $Q_0(z) = 0.54 \times 0.419$, 则土壤水分入渗和蒸发过程的初始和边界条件为

$$\begin{cases} Q(z,0) = 0.54 \times 0.419\,, z \in [0, 200]\,; \\ q(t) = \begin{cases} 0.1\ \mathrm{cm/h}, & \text{当} 0 < t < 450\ \text{小时}; \\ -0.1\ \mathrm{cm/h}, & \text{当} 450 \le t \le 900\ \text{小时}; \end{cases} \\ Q(200,t) = 0.54 \times 0.419\,. \end{cases} \tag{5.14}$$

当 $S_r = 0$ 时，将这些数据输入模式 (5.6)-(5.7), 我们分别得到从 0 到 450 小时中，每隔 30 小时土壤中的含水量和水分通量的分布图 1 和图 2. 从图 1 可以看出，当入渗开始时刻，地表面层的含水率迅速从 0.226 上升到 0.5 以上. 之后，地表层 $z = 0$ 处的含水率变化不大，并逐步接近饱和含水率，但没有达到饱和含水率，不产生径流. 从图 2 看出，入渗通量随深度递减，同时随着入渗时间的增加，入渗通量的梯度变化越来越平缓. 当 $t > 450$ 小时时，表土以 0.1cm/h 的强度蒸发. 图 3 和图 4 分别为从 0 到 900 小时土壤中的水分入渗和蒸发交替进行的含水量和水分通量分布图，其中从 0 到 450 小时入渗，从 450 小时以后开始蒸发. 从图 3 可以看出，当开始蒸发时，表土的含水率降低. 过了一段时间以后，含水率分布曲线逐渐随时间而降低. 由图 4 可见，当开始蒸发一段时间以后，土壤表面至其中某一位置，通量为负，与表面蒸发时水分通量向上的实际情况相符.

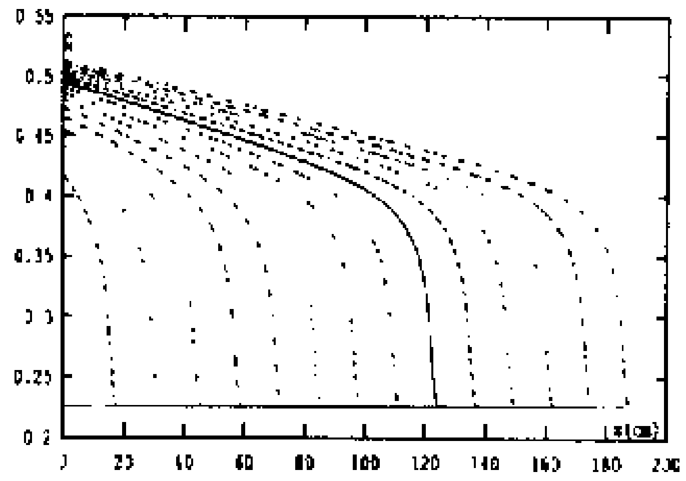

图 1. 入渗每隔 30 小时的含水量分布

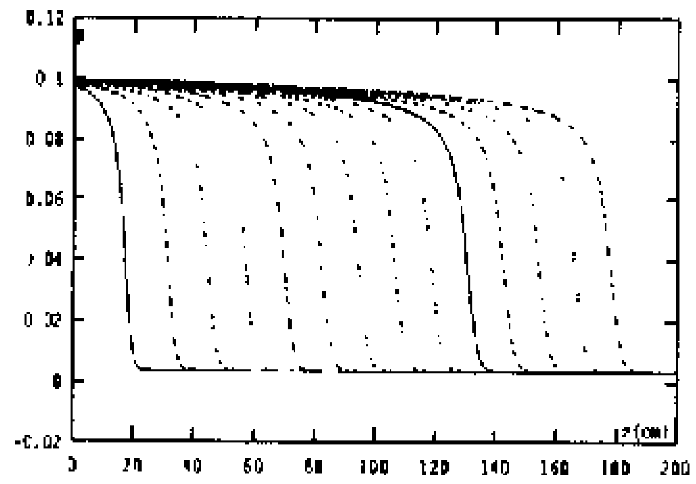

图 2. 入渗每隔 30 小时的水分通量分布

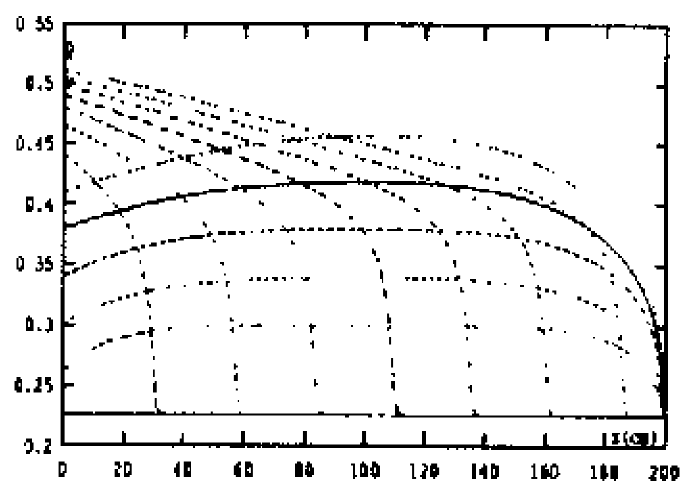

图 3. 入渗及蒸发每隔 60 小时的含水量分布

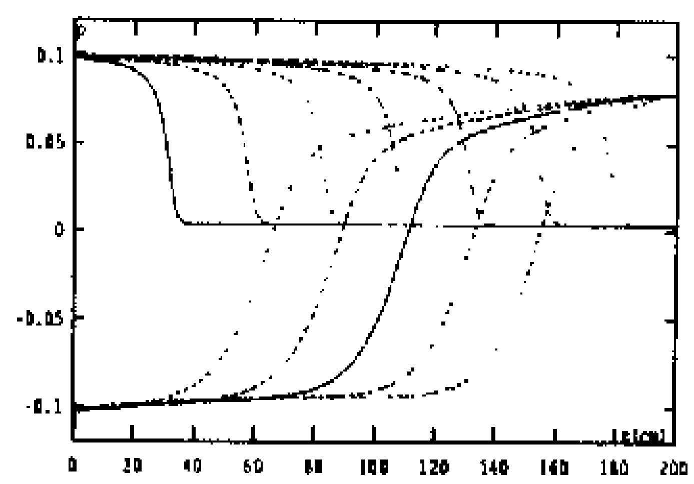

图 4. 入渗及蒸发每隔 60 小时的水分通量分布

对表 1 的其余 11 种土壤也可给出其混合有限元数值解.

结论：本文初步探讨了利用混合有限元方法，同时求解含水量和通量，建立了一维非饱和土壤水流动的数值计算模型，其初步的模拟结果基本上反映了物理性质，且具有计算稳定，通量模拟精度高等优点，可以用来统一计算剖面入渗、蒸发等以及这些现象交替出现时的土壤含水率和水分通量分布. 它可用于高精度高分辨率陆面物理过程模式. 为了方便计算，并保证足够的精度，我们的数值例子对含水量和通量都采用了线性逼近. 事实上，含水量和通量分别采用零次元和一次元逼近，也是收敛的.

参 考 文 献

[1] 叶笃正, 曾庆存, 郭裕福. 当代气候研究. 北京: 气候出版社, 1991.

[2] Y.J.Dai, Q.C.Zeng, A land surface model (IAP94) for climate studies, Part I: formulation and validation in off-line experiments, *Advances in Atmospheric Sciences*, **14**(1997), 433–460.

[3] 谢正辉, 曾庆存, 戴永久等, 非饱和流问题的数值模拟研究, 中国科学 (D 辑), **28**(1998), 175–180.

[4] 谢正辉, 曾庆存, 戴永久等, 有限元方法在非饱和土壤水流问题中的应用, 气候与环境研究, **28**(1998): 73–81.

[5] 雷志栋, 杨诗秀, 谢森传, 土壤水动力学, 北京: 清华大学出版社, 1988.

[6] J.Bear, Dynamics of fluids in porous media, American Elsevier Publishing Company Inc. 1972.

[7] M.A.Celia, E.T.Boulouton, R. L.Zarba, A general mass conservation numerical solution for the unsaturated flow equation, *Water Resour. Res.*, **26**(1990), 1483–1496.

[8] R.A. Adams, Sobolev spaces, New York, Academic Press, 1975.

[9] V.Girault, P.A. Raviart, Finite element methods for Navier–Stokes equation, Theorem and Algorithms, Springer–Verlag, 1986.

[10] V.Thomee, Galerkin finite element methods for parabolic problems, Lecture Notes in Math, 1054, Spinger–Verlag, Berlin, New York, 1984.

[11] P.G.Ciarlet, The finite element methods for elliptic problems, North-Holland. 1978.

[12] 罗振东. 有限元混合法理论基础及其应用 — 发展与应用. 济南, 山东教育出版社, 1996.

[13] R.E.Dickinson, A.Henderson-Sellers, P.J.Kennedy et al, Biosphere atmosphere transfer scheme (BATS) for NCAR community climate model, NCAR Technical Note, NCAR/TN 275+STR, 1986.